Н. И. КОВАНЦОВ

МАТЕМАТИКА И РОМАНТИКА

БИБЛИОТЕЧКА
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ШКОЛЫ
МАТЕМАТИКА

Н. И. КОВАНЦОВ

МАТЕМАТИКА И РОМАНТИКА

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,
ИСПРАВЛЕННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

Киев
Головное издательство
издательского объединения
«Вища школа»
1980

ББК 22.1
51
К56

УДК 51 (023.11)

Кованцов Н. И. **Математика и романтика.** Киев : Вища школа. Головное изд-во.— 1980. 136 с. 20201. 1702040000.

В книге рассказывается о том, как, следуя внутренним законам развития, математическая мысль пришла от попыток решения великих задач древности к замечательным открытиям последующих времен (конические сечения, метод координат, решения алгебраических уравнений в радикалах, теорема Руффини-Абеля, теория Галуа и т. д.). Математические рассуждения перемежаются беллетризованным изложением историко-математических фактов (Анаксагор в темнице, юность Архимеда и его гибель, Декарт на пиратском корабле, диспут между Тартальей и Феррари и др.). «Сухая» математика соседствует со стихотворными отрывками из художественных произведений.

За исключением отдельных мест (поля, группы, расширения уравнений в радикалах), изложение всюду элементарно.

Для учащихся физико-математических школ. Книга может быть полезной старшеклассникам общеобразовательных средних школ и всем любителям математики и ее истории.

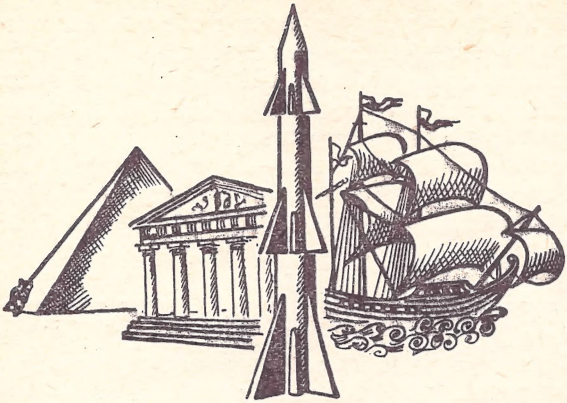
Ил. 38. Список лит.: 11 назв.

Редакционная коллегия: член-кор. АН УССР *А. В. Скороход* (ответственный редактор), проф. *Л. А. Калужнин*, проф. *Н. И. Кованцов*, доц. *В. И. Коба*, доц. *Н. Я. Лященко*, доц. *Ю. М. Рыжов*, доц. *М. И. Ядренко* (заместитель ответственного редактора), канд. пед. наук *Л. В. Кованцова*.

Редакция литературы по математике и физике
Зав. редакцией *Е. Л. Корженевич*

К $\frac{20201 - 008}{М211\ (04) - 80}$ 363 — 80 1702040000

© Издательское объединение «Вища школа», 1976
© Издательское объединение «Вища школа», 1980, с изменениями



ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Дорогие друзья! С малых лет каждый из вас изучает математику. Кто — с интересом, кто — с безразличием. Правда, если вы учитесь не только в обычной, но и в специализированной физико-математической школе, то, надо полагать, занимаетесь вы математикой не по принуждению, а по внутреннему влечению. Однако — и те, кто учится лишь в одной школе, и те, кто совмещает эту учебу с учебой в специализированной школе,— всегда ли вы отдаете себе отчет в том, чем именно привлекает вас математика или, наоборот, чем она отвращает вас от себя?

Можно любить науку за строгую согласованность ее истин, за ее силу и многогранность, можно, наоборот, питать нелюбовь к ней за ее сухость и за ее кажущуюся ненужной сложность, за немотивированную искусственность ее построений и т. д. Но эта любовь и эта нелюбовь будут представлять собой нечто поверхностное и непрочное, что-то случайное и необязательное, если от вас ускользнет то, что можно было бы назвать душой науки, ее умом и ее интеллектом, ее духовной красотой и ее гармонической утонченностью. Мы намеренно воспользовались терминами, характерными при оценке человеческой личности, так как именно такой личностью, целостной и бесконечно интересной, должна предстать перед вами наука, чтобы вы по-настоящему могли почувствовать, что она такое есть.

В книге сделана попытка представить математику в особом романтически приподнятом духе, представить ее

своеобразную душу, слившуюся с трепетными образами тех, кто ее творил и кто ею жил. Если тот из вас, кто любил математику прежде, полюбит ее еще больше,— цель наша достигнута. Если же у кого-то, не любившего математики, останется чувство неприязни и безразличия к ней и сейчас, то и это — не трагедия: математика совсем не единственный объект, на который могут быть устремлены ваши помыслы, лишь бы они были, эти помыслы.

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Во втором издании несколько расширена историко-математическая тематика — к очеркам, содержащимся в первом издании, добавлен ряд новых («О чем он думал, наш далекий предок», «Дерзкий чужестранец», «Загадка старого папируса» и др.). Исправлены некоторые опечатки, сокращены отдельные длинноты, замедлявшие динамический характер рассказа.

Автор искренне благодарен всем тем, кто имел случай подсказать ему новые темы, достойные включения в брошюру, либо указать на те или иные неточности, в ней содержащиеся. Особую благодарность автор выражает доценту Симферопольского университета В. Н. Скрыдлову, доброжелательные рекомендации которого послужили истинным подспорьем в работе над книгой.

Академик А. Д. Александров и студенты

В свое время на страницах «Комсомольской правды» развернулась интересная дискуссия. И вот по какому поводу. Студенты МВТУ им. Баумана обратились через газету к студентам Московского университета с предложением начать разговор о том, кто из них чем занимается. Приходите к нам, говорили будущие техники, расскажите, над чем думаете. А мы придем к вам, расскажем о том, что интересует нас. Будет интересно и вам, и нам.

На это студенты университета — будущие ученые — глубокомысленно ответили: «Прийти-то, конечно, можно, можно и рассказать, можно и послушать, но вот в чем вопрос — зачем это вам или нам нужно? Какую мы будем иметь от этого пользу?» Разговор, не успевший начаться, грозил заглохнуть. Было предложение, но оно подхвачено не было, вместо ожидавшегося сближения — отчуждение.

Положение спас академик А. Д. Александров, человек в высшей степени остроумный и интересный. «Ты смотри, какие мудрецы,— сказал он по поводу ответа будущих ученых.— Все-то они хотят заранее предусмотреть, все-то подсчитать. И если реальной материальной пользы от разговора не будет, то незачем-де его и начинать. Ну, прямо, столпы прагматизма и вселенской целесообразности». (Может быть, и не такими точно словами говорил академик, но смысл его слов был именно таким). «А я бы вот,— продолжал он,— не стал сушить себе голову над выяснением того, для чего мне то или иное значение нужно.

Х о ч у з н а т ь — и весь сказ. Просто так! Потому что это — моя жизненная потребность, потому что без этого мне жизнь — не в жизнь. Хочу знать потому, что не могу не хотеть этого».

Вот как, оказывается, можно смотреть на вещи. Знать, знать, знать... Знать как можно больше, знать как можно глубже. Жить интереснее, когда каждый день можно узнавать что-то новое. Говорят, римский император Тит считал потерянным тот день, когда он не творил добрых дел. Сомнительно, был ли он в действительности таким добротворцем, каким хотел себя представить, но для нас должна быть совершенно непреложной истина — для человека потерян тот день, когда он не узнает чего-то нового.

Передают слова Валерия Брюсова, говорившего, что, если бы ему было отпущено шесть жизней,— их не хватило бы для того, чтобы утолить ту безмерную жажду познания, которой он был одержим. А Отто Юльевич Шмидт составил себе такую жизненную программу, для выполнения которой понадобилось бы несколько сотен лет. С болью в сердце вынужден был ученый выбрасывать из нее целые куски, сокращать до минимума другие, отрывать время от сна, отдыха и т. д. Да разве только Шмидт?!

Зачем нужно учиться, напрягать свой разум, тратить колоссальные усилия, когда, не учась или учась намного меньше, можно получать такую же или даже еще большую зарплату? А затем, очевидно, что очень уж различна жизнь у того, кто меряет ее на рубли, и у того, кто измеряет ее интеллектуальными ценностями.

Вот как писал великий Данте в своей бессмертной поэме:

Тот жалкий срок, пока еще не спят
Земные чувства, их остаток скудный
Отдайте постиженью новизны,
Чтоб солнцу вслед увидеть мир безлюдный.
Подумайте о том, чьи вы сыны!
Вы созданы не для животной доли,
А к доблести и к знанью рождены!

Не надо думать, что в этом содержится призыв к этакому бездумному всеядничеству, к полнейшей бессребрености. Нет, нет и нет. Наука сейчас, как никогда ранее, является материальной силой общества. Измерять результаты научных достижений рублем не только не постыдно, но и нужно. Но ведь и рубль-то этот нужен лишь потому, что помогает сделать жизнь полнее и интереснее. Когда же удовлетворены материальные потребности, начинают выступать на первый план потребности духовные. И удовлетворять эти потребности можно уже не только через посредство рубля, но и непосредственно, что намного интереснее. Тогда наука становится романтичной, поэтичной и величественной, как величественны в своем стремлении ввысь шпили сказочно прекрасных средневековых готических соборов. «Когда смотришь извне на эти готические соборы,— писал Г. Гейне в своей «Романтической школе»,— эти громадные сооружения, такие воздушные, такие легкие, изящные, прозрачные, будто вырезанные из бумаги, будто какие-то брабантские

кружева из мрамора,— тогда еще сильнее ощущаешь всю мощь этого времени, сумевшего даже камнем овладеть настолько, что он является нам почти в призрачном одухотворении».

О чем он думал, наш далекий предок?

О чем думал он в долгие зимние ночи, под завывание свирепой вьюги, лежа у мерцающего очага, в пляске уродливых теней на стенах неуютной пещеры? О чем были его медленные, неповоротливые мысли, мысли туманные, мысли-образы, мысли-воспоминания?

Попробуем догадаться, о чем были эти мысли. Только давайте сразу же согласимся с тем, что эта догадка будет схемой; мы заставим нашего наугад взятого предка, коротающего зимнюю ночь у затухающего очага, этаким нашим собственным волеизъявлением пройти за одну ночь то, на что его предшественники потратили миллионы лет, когда еще не были людьми, и сотни тысяч лет — уже будучи людьми.

— Передо мною,— думал наш воображаемый предок,— уйма разных вещей. Как в них разобраться? Вот камень, а вот бивень мамонта. Если я все время буду считать, что камень есть камень, а бивень — бивень, я недалеко уйду. Это слишком сложно — держать в памяти все свойства вещей, которые меня окружают. Сохраню лишь некоторые из этих свойств, буду внимательно рассматривать именно их. Мне будет легче, я просто наведу порядок в этом хаосе вещей. Жизнь очень сурова. Она бьет меня на протяжении столь длительного времени. Пора бы уже извлечь из этого какие-то уроки, иначе мой сосед — медведь из вон той берлоги очень быстро со мною справится. Попробую перехитрить его.

— Что я вижу, глядя на этот камень и на этот бивень? А то, что их можно сопоставить с пальцами моей руки. С камнем — только один палец, например большой, с камнем и бивнем, вместе взятыми,— уже большой и указательный, а если я сюда присоединю еще и эту шкуру, то понадобится и средний палец.

— Как мне все это назвать?— продолжались тягучие, неторопливые мысли.— Буду говорить, что я имею дело с числами, что чем больше предметов, тем большее число я с ними сопоставляю. Я могу, следовательно, пересчитать предметы независимо от того, из чего они сделаны...

Сквозь свист усиливающейся вьюги человеку неясно послышался отдаленный вой голодных шакалов. Медленно повернув голову, он внимательно посмотрел на массивный плоский камень, прикрывавший изнутри вход в пещеру. Пучки сухой травы были заботливо засунуты во все щели, образовавшиеся между камнем и стеной. Несколько минут прошло в напряженном ожидании. Постепенно тревога, внезапно возникшая, рассеялась — нет, зверю было не под силу отодвинуть огромный валун.

И снова — нескончаемый поток мыслей.

— Число... Что это — пустяк, то, что я придумал? На первый взгляд кажется, что да, пустяк, но именно лишь на первый. Пройдут тысячи лет, и мой потомок, который придумает названия для очень многих вещей, скажет, что это — великолепно, что это — гениально, что за всю свою историю я не выдумал ничего более величественного и более совершенного, чем понятие числа. Оно потому величественно и гениально, что просто, а просто потому, что найдено в результате долгих, мучительных, неосознаваемых поисков. Мой сосед медведь навсегда останется медведем именно потому, что до такой простой вещи никогда не додумается...

— Итак, я пришел к понятию числа. Это — одно из очень важных свойств, которым обладают окружающие

меня предметы,— быть сопоставимыми с числами, оно — общее для всех этих предметов. Но у них есть и другие общие свойства, на которые я тоже должен обратить внимание, если не хочу быть подобным медведю или мамонту. Я вижу, что камень, как его ни верти, никак нельзя совместить с бивнем. Даже если я уберу бивень, то в то место, где он лежал, камень никак не вкладывается. Как это можно выразить словами? Скажу, что камень и бивень имеют разную форму. Шкура на моих плечах имеет свою форму, отличную как от той, какую имеет камень, так и от той, какую имеет бивень.

— Итак, каждый предмет, который я вижу, имеет определенную форму.

— Чтобы не слишком разбрасываться, буду сейчас пока думать о том, что связано с этим новым найденным мною понятием — понятием формы. Назову-ка я всю совокупность моих размышлений по этому вопросу геометрией. Мои потомки назовут эту совокупность наукой и вложат в нее гораздо большее содержание, чем вкладываю в нее сейчас я. Это, конечно, их дело, иначе они не могли бы считать себя потомками,— каждое последующее поколение должно знать больше, чем знали предыдущие поколения.

Наш предок встал, взял суковатую палку и помешал угли в очаге. Потом подбросил в него несколько сухих веток, принесенных еще днем из близлежашей рощи. Пламя взметнулось к сводам пещеры, уродливые тени на стенах заплясали еще живее. Темень отодвинулась от очага и спряталась в дальних углах. Человек запахнул толстую, плохо обработанную шкуру медведя, висевшую у него на плечах, и, скользнув взглядом по кускам мяса мамонта, сложенным в глубине пещеры, вновь улегся у очага на подстилку из высушенной травы.

— Геометрия,— вновь потянулась бесконечная нить из бесконечного клубка.— Это название, открытым мною началам науки, конечно, будет дано гораздо позднее греками, я просто предвосхитил его. Что будет входить в эту науку?

— Вот я вижу перед собой стебельки травы, а вот — ребро камня. Здесь — тонкий лучик света, который пробивается через отверстие в очаге и падает пятном на потолок пещеры. Что общего у всех этих вещей? Скажу, что все они являются частями прямой линии. Они могут быть и короткими, и длинными. Если я их

буду рассматривать каждый в отдельности, такими, какие они есть, то мне, наверное, будет очень трудно — слишком много деталей мне нужно будет держать в памяти. Попробую ради простоты считать, что прямая линия бесконечна. Скажут, что я это придумал нарочно, что в действительности среди вещей, которые меня окружают, я не найду ни одной, которая могла бы быть этой бесконечной прямой. Ну и пусть! Я воображу себе ее, совершу какой-то сознательный мыслительный процесс, отправляясь от множества конкретных вещей, которые я могу потрогать, собрать, разбросать... Мои потомки будут мне благодарны за то, что я придумал эту бесконечную прямую — с ней познавать мир им будет гораздо легче, чем без нее.

В голове человека мелькнула мысль, вызвавшая на суровом лице гримасу улыбки,— а какими будут эти его потомки? Будут ли они, как и он, сидеть у костра в дикой необжитой пещере или построят другие, более удобные жилища? Чем будут питаться? Во что одеваться? Чего они сумеют достигнуть с помощью понятий числа и фигуры? Догадаются ли они в своем будущем благополучии о том, с каким великим трудом пришел он к столь важным и столь нужным понятиям?

— Что же я вижу еще? Я вижу камешки, одни большие, другие маленькие, третьи еще меньше. Вообще, если я захочу, я могу вообразить себе камешки сколь угодно малых размеров. Не имело ли бы смысла связать с этим новое геометрическое понятие? Свяжу. И присвою этому новому понятию название точки. Опять ради простоты буду считать, что точка не имеет ни длины, ни ширины, ни высоты. Зачем я это делаю? А затем, что обращаться с такой точкой мне и тем людям, что последуют за мной, намного проще, чем если бы я брал ее со всеми тремя измерениями...

Так рассуждая, наш предок пришел и к понятию плоскости, и к понятиям геометрической фигуры, взаимно перпендикулярных и параллельных прямых, подобных фигур и т. д. Нет, нет, это было на так просто, как мы представили себе. Перечисленные понятия совсем не явились результатом сознательной воли человека. Все это происходило неосознанно, стихийно, без намерения классифицировать понятия, сопоставлять их, противопоставлять друг другу. Все это происходило на протяжении многих и многих сотен тысяч лет. Осоз-

нанное представление о подмеченных свойствах фигур появилось намного позднее. Тогда и оформилась особая наука, которую назвали геометрией. У нашего предка науки еще не было. Были лишь проблески ума, и, надо отдать ему должное, проблески гениальные...

Гениально, потому что просто

Какие выводы следует сделать из размышлений нашего далекого предка, да и вообще из наших собственных размышлений над вопросами, связанными с происхождением математики? Выводы эти таковы:

1. Математика возникла из практических потребностей людей («Жизнь очень сурова. Она бьет меня на протяжении столь длительного времени. Пора бы уже извлечь из этого какие-то уроки»). Первобытному человеку приходилось с опасностью для жизни охотиться на превосходящих его силою животных, тем самым приходилось соизмерять соединение силы нескольких охотников с силой этого животного. Ему приходилось обрабатывать землю, бросать в нее зерно, поливать ее и т. д., а это все требовало умения считать, сопоставлять, мерять.

2. Математика возникла в результате совершенно естественного желания человека упростить в своем сознании явления реальной действительности («Это слишком сложно — держать в памяти все свойства вещей, которые меня окружают. Сохраню лишь некоторые из этих свойств, буду внимательно рассматривать именно их. Мне будет легче, я просто наведу порядок в этом хаосе вещей»). Так были «придуманы» точки как тела, не имеющие размеров, прямые как линии, лишенные ширины и толщины и простирающиеся в обе стороны бесконечно, плоскости как бесконечные поверхности, лишенные толщины.

Первоначально наши основные геометрические понятия появились именно в виде таких образов, и лишь много позднее в эти понятия стали вкладывать более широкое содержание. Нигде в природе человек не встречал тел, не имеющих размеров, линий бесконечной длины, поверхностей бесконечной площади. Эти идеальные образы возникли в результате абстрагирующей работы ума, они явились теми инструментами, которые оказались наиболее удобными и практически целесообразными.

3. Дело происходило, конечно, совсем не так, как это мы, обратясь к художественной условности, изобразили выше — сел-де первобытный человек и в одну ночь все придумал. Это «придумывание» происходило на протяжении сотен тысяч лет, причем поначалу человек ясно и не осознавал того, что он что-то придумал. Это можно сравнить с тем, о чем говорится в следующих забавных стишках:

Однажды горилла гориллу учила —
Горилла гориллу дубинкой лупила.
Не знала она, когда палку схватила,
Что с этой минуты она — не горилла.

Человек жил, трудился, делал что-то такое, от чего легче жилось, а в результате получилось нечто колоссальное — наука математика.

4. Математика возникала всюду, где жил и творил человек. К тому времени, когда на исторической арене появились древнейшие цивилизации, в частности египетская, математика достигла уже довольно высокой ступени развития. Когда египтяне заявили о своем существовании,— им уже были ведомы полученные от их безвестных предшественников такие сложные понятия, как угол, параллелизм, правильные многоугольники, окружность и т. д. А ведь прийти к таким понятиям, не имея еще сложившейся системы научных представлений, намного труднее, чем в уже имеющейся науке доказать какую-либо важную теорему.

Что же сделали египтяне?

Загадка старого папируса

Писец был стар. Высохшими и морщинистыми были его руки, землистый цвет имело его лицо. Бритая круглая голова его непрерывно подергивалась, как при нервном тике.

Он сидел в тени пирамиды Хеопса, обеими руками сжимая старый полуистлевший папирус, и слезящимися глазами смотрел на желто-красное марево бескрайней Ливийской пустыни. Он казался совершенно безучастным ко всему, и лишь очень внимательный наблюдатель усмотрел бы за этой видимой безучастностью глухую затаенную тоску, намертво приковавшую его к подножию этой древней, как и он сам, пирамиды.

Пустыня. Дикая, безжалостная, вечная пустыня. Слезы и пот впитавшая в себя пустыня. Вопли и стоны

вобравшая в себя пустыня. Извечным стражем стоишь ты по обе стороны священной реки и, как затаившийся в прибрежном тростнике крокодил, поджидаешь свои легкомысленные жертвы.

Если бы кто-нибудь, как могущественный чародей, мог проникнуть в тайные думы старика, он содрогнулся бы от беззвучных рыданий, сотрясавших все его хилое полуживое тело. Он пронесся бы мыслью над бесконечной чередой песчаных волн и остановился над местом, над которым еще витала тень далекой и почти забытой всеми трагедии...

Едва первые лучи восходящего светила скользнули по верхушке самой высокой пирамиды, как молодой атлет, стряхнув с себя остатки ночного оцепенения, бодро вскочил с жесткой циновки, на которой приучил себя спать с малых лет, и, обежав два раза широкий двор, быстрым шагом направился во дворец. Это был Ахмес, любимый писец фараона Раауса. Два года назад фараон отличил его среди всех других придворных писцов, и теперь ни одно сколько-нибудь значительное дело не начинал без него. Ахмес стал совестью и душой фараона, его советником и его правой рукой. В мутных волнах сложной и хитроумной государственной политики он один мог безошибочно находить верный путь и поэтому с каждым днем становился все более необходим фараону.

Далеко не всем окружавшим пышный трон фараона это было по душе. Особую неприязнь к молодому любимцу Раауса, неприязнь, тщательно скрываемую, питал главный жрец храма Амона-Ра Хорхетеп. Обладатель огромного состояния, Хорхетеп безжалостной рукой выжимал из целой армии своих рабов и попавших к нему в кабалу свободных землепашцев все, что только можно было выжать. Стон не умолкал на обширных плантациях главного жреца, под свистом плетей никла и смирялась человеческая воля...

Путь во дворец проходил мимо роскошного жилища Хорхетепа. Еще издали писец заметил перед высокими дверями дома жреца большую толпу коленопреклоненных людей. Некоторые из них, опустив согнутые локти на желтый песок и склонившись над ними, застыли в скорбной неподвижности. Другие, спрятав лицо в ладони рук, мерно покачивались в такт заунывному песнопению, слова которого Ахмес не мог разобрать. Однако

не стоило никакого труда догадаться о том, что находившаяся перед ним толпа пришла умолять Хорхетепа смягчить непосильное бремя налогов и поборов, с каждым годом становившееся все более и более жестоким.

Несколько лиц повернулось к проходившему писцу. Одно из них привлекло внимание Ахмеса. Высокий коленопреклоненный человек, похожий на других и чем-то трудно уловимым отличный от них, смотрел на него взглядом, исполненным безмерного страдания и усталости. В смиренной позе угадывались гордая осанка и прирожденное благородство. Писец задержал свой шаг и несколько мгновений безмолвно смотрел на измученного соотечественника.

— Кто ты?— спросил он коленопреклоненного.

— Мое имя Тутмос, господин. Я — служитель сельскохозяйственных плантаций жреца Хорхетепа.

— Что привело тебя сюда?

— Я пришел просить за дочь, господин.

— Подойди ко мне.— Высокий проситель поднялся с колен и подошел к писцу.— Что случилось с твоей дочерью?

— Хорхетеп требует, чтобы я за долги продал ее навечно в его храм.

Взгляд Ахмеса затуманился. Память молниеносно нарисовала толпы приниженных храмовых прислужниц, вынужденных под видом ритуального богослужения предаваться гнуснейшему разврату на потеху похотливым, погрязшим в пороке жрецам. Только крайняя нужда могла заставить женщину смириться с необходимостью вести столь постыдную и столь порицаемую всеми жизнь.

— Сколько ты должен Хорхетепу?

— Сумма велика, господин. Я не в состоянии ее выплатить. Я пришел предложить жрецу самого себя в качестве последнего храмового раба.

— Не делай этого. Отправляйся домой и приходи сегодня ко мне после захода солнца...

Тия, высокая, ладная, порывистая Тия, легко двигалась по комнате, украдкой бросая быстрые взгляды на Ахмеса. Молодой писец с бьющимся сердцем следил за каждым движением красивой девушки.. За две недели, истекшие с того дня, как он впервые переступил порог ее дома, мысли о ней полностью вытеснили из его сознания весь тот круг вещей, в котором он до сих пор

привычно вращался. Тия, та Тия, котрую он избавил от позорной жизни храмовой прислужницы, сделалась его царицей, его кумиром, его богиней, которой он сам, не задумываясь, посвятил бы без остатка все свои дни как самый безответный, как самый преданный ее раб...

— Тия!

— Да, мой господин.

— Не называй меня своим господином. Зови меня просто Ахмесом. Так называет меня сам повелитель Великого дома фараон — жизнь, здоровье и сила, так называют меня все близкие мне люди.

— Я слушаю тебя, мой Ахмес.

— Скажи, Тия, что это за папирус, который я вижу вот тут на полке, спрятанный за статуэткой Изиды.

Тия метнула взгляд на то место, которое указал Ахмес. Легкая бледность покрыла ее лицо, следы нерешительности, следы внутренней борьбы проступили на нем. Привычно солгать, утаить, скрыть истину от неосторожного любопытства? Годы унизительного подневольного положения приучили к этой необходимой скрытности. Но тут... Девушка с удивлением почувствовала, что ее язык не в силах произнести привычной лжи.

— Этот папирус, Ахмес,— произнесла она неверным голосом,— мне подарила моя покойная подруга Раффия.

— Как он попал к ней и отчего она умерла?

Тия не отвечала. Скорбная тень набежала на ее сразу же помрачневшее чело. Несколько томительных минут протекло в полном молчании.

— Она была замучена слугами фараона вместе со своим братом,— с трудом произнесла она наконец.— Брат ее открывал заброшенные гробницы и забирал ценности, которые там находил. Однажды он принес и этот папирус. Раффия, не зная, что с ним делать, подарила его мне...

С волнением вглядывался Ахмес в полустертые иероглифы давно забытого письма. Соколы, цапли, скарабеи, детерминативы. Люди, в удивлении поднявшие руки, цветы лотоса, измерительные рулетки, согнутые пальцы, солнечные диски... Задачи, правила, таблицы. Поучения о том, как считать, как производить измерения, как разлагать дробь в сумму других дробей... Древность дохнула своим очарованием в раскрытую душу

восхищенного писца. Древность загадочная, древность манящая, древность дразнящая и не насыщающая. Древность великая и древность забавная. Ахмес от души рассмеялся, когда, после нескольких попыток, понял, наконец, смысл задачи, которую безымянный автор зашифровал в виде простой последовательности слов: «7 домов, 7 кошек, 7 мышей, 7 колосьев ячменя, 7 мер зерна; сколько всего?» Последовательность, с первого взгляда кажущаяся случайным набором предметов, становилась до смешного понятной, когда между семерками этих предметов вставить всего несколько чисто служебных слов. Тогда получалось следующее: «Есть 7 домов, в каждом доме — по 7 кошек, каждая кошка съедает 7 мышей, каждая мышь, в свою очередь, съедает 7 колосьев ячменя, из каждого колоса может вырасти 7 мер зерна. Сколько всего имеется этих разнородных предметов?» Древний автор, явно не лишенный чувства юмора, с озорством предлагал складывать дома с кошками, кошек с мышами, мышей — с колосьями ячменя, колосья — с мерами зерна, в результате чего надо было узнать общее количество существ и предметов, содержащихся в этом своеобразном Ноевом ковчеге. Получалось забавно и вместе с тем поучительно.

Бережно, стараясь не сломать уже тронутый тленом папирус, разворачивал и разворачивал писец бесконечную драгоценную ленту. Несчастный брат Раффии! Если бы он знал, какое великое сокровище нашел он в забытой гробнице! Сокровище, по сравнению с которым настоящее золото и драгоценные камни — всего лишь жалкое, нищее убожество...

Когда текст был полностью прочтен, Ахмес достал новый, только что приготовленный свиток папируса, заострил бронзовым ножом высушенную на солнце и расщепленную на конце тростинку и, смачивая ее черной краской из стоявшего рядом глиняного сосуда, стал медленно переписывать его новыми, иератическими письменами...

— Отец, что случилось? Почему у тебя такой убитый вид? Где Тия?

Тутмос не отвечал. Он сидел посреди комнаты на старой тростниковой циновке, поджав под себя ноги, и взглядом,исполненным неизбывного отчаяния, смотрел на пол перед собой. От его прежней, гордой и благородной осанки не осталось и следа.

— Почему в комнате такой беспорядок?— продолжал допрашивать его Ахмес.— Куда исчезли все вещи? Почему ты сидишь на этой дырявой циновке?

Прошло, однако, немало времени, прежде чем Тутмос очнулся от охватившего его глубокого оцепенения и заговорил. Ахмес с жадным вниманием ловил каждое его слово, часто лишь догадываясь о его смысле сквозь почти нечленораздельное бормотание убитого горем и ставшего вдруг почти совсем стариком отца Тии.

— Господин,— сказал Тутмос,— слуги жреца Хорхетепа третьего дня были здесь. Они допрашивали меня и Тию. Им стало известно о дружбе, которая связывала мою дочь с покойной Раффией. Нас обвинили в том, что деньги, которые мы заплатили несколько недель назад, были нами будто бы похищены из гробниц. С нами обращались, как с настоящими грабителями. Они пытали меня, господин. Они угрожали Тии, что ее заживо погребут в песках.

— Куда они увели Тию? Почему ты сразу же не известил меня?

— Я не смел, господин. Мне приказали не покидать дома до тех пор, пока Хорхетеп не вынесет мне и дочери своего приговора. И, кроме того, я думал, господин, что это ты сообщил слугам жреца о дружбе Тии с Раффией и о разграбленных гробницах.

— Я?!— у Ахмеса перехватило дух от столь несуразного подозрения.— Как ты мог подумать такое?!

Но тут же внезапная мысль обожгла его мозг. Папирус! Как он мог быть так неосторожен?! Увлеченный все последние дни работой по его переписке, он совершенно забыл о тайных соглядатаях жреца и, выходя из дома по делам, призывавшим его во дворец, беззаботно оставлял оба свитка на столе. Для вездесущих ищеек, обретавших при храме Амона-Ра, ничего не было проще, как, воспользовавшись его отсутствием, проникнуть в его дом и произвести полную ревизию всем вещам, в нем находившимся. Должно быть, им была известна тайна погребенного папируса, равно как и его любовь к несчастной девушке. Хорхетеп! Тайный, коварный и жестокий враг! Он не остановится ни перед чем, чтобы убрать со своего пути слишком высоко вознесшегося писца. Он всегда ударит по самому больному и беззащитному месту.

— Тутмос, где Тия? Куда увезли ее слуги жреца?

— Я не мог узнать этого, господин. Я могу лишь догадываться. Самых секретных своих узников (о моя Тия, как ты могла оказаться в их числе!) Хорхетеп держит неподалеку от каменоломен Абу-Симбела в Верхнем Египте...

Не знавшие отдыха три черных скакуна из лучшей конюшни фараона тяжело храпели, взбираясь на очередной крутой подъем. Три всадника с закутанными от пыли и зноя головами, пригнувшись к их вытянутым шеям, неотрывно смотрели перед собой, трепеща от боязни не увидеть того, ради чего свершалась эта дикая скачка. Тонкий, звенящий песок проникал сквозь мельчайшие поры одежды, царапал кожу, хрустел на зубах, тяжелил набрякшие, налитые кровью, истерзанные веки...

Лишь на четвертые сутки в знойном мареве небъятной пустыни, как мираж, возникли неясные очертания цели — три мчавшиеся во весь опор всадника. Когда расстояние между преследователями и преследуемыми сократилось до нескольких полетов стрелы, стало видно, что поперек седла переднего из них была перекинута запеленутая в белое покрывало тонкая человеческая фигура.

— Остановитесь!— во всю силу закричал Ахмес.— Именем нашего великого повелителя приказываю вам остановиться!

Призыв не был принят, скачка продолжалась. Расстояние до цели медленно, но непрерывно сокращалось. Когда оно уменьшилось настолько, что стали видны дымящиеся, запавшие бока тяжело скачущих коней, раздался резкий щелчок спущенной тетивы и длинная оперенная стрела с ликующим пением устремилась вслед за ускользающей от нее жертвой. Всадник, скакавший сзади, широко взмахнув обеими руками, медленно стал западать на спину и, наконец, упал с лошади в клубящуюся под ее копытами пыль.

Темп погони все нарастал. Беглецы все ближе и ближе. Вскоре голова скакуна, на котором мчался Ахмес, поравнялась с крупом преследуемого им коня. Оставалось всего лишь мгновение до конца этой изнурительной скачки, всего несколько локтей до цели, когда вдруг в высоко поднятой руке переднего всадника ослепительно сверкнуло лезвие ножа и в то же мгновение с силой опустилось на закутанную в белое фигуру.

Преследуемые и преследователи разом остановились. Соскочив с коня, Ахмес лихорадочно схватил дрожащими руками медленно сползавшее наземь человеческое тело. Из развернувшегося савана на него пристально и холодно смотрели неподвижные, безжизненные глаза Тии...

Солнце давно уже перешло на закат, и его угасавшие лучи били прямо в лицо старого писца. Тень от великой пирамиды переместилась на ее противоположную сторону, почти достигая своим острием берегов священной реки. Далекий сокол одиноко парил в поднебесье, подкарауливая очередную неосторожную жертву. Природа замерла в величавом покое.

Из горла старика послышались хриплые клекочущие звуки. Пальцы рук медленно разжались, папирус выскользнул из них и, мягко упав на песок, остался у его неподвижных ног. Постепенно, минута за минутой, коченели члены. Лишь губы старика беззвучно двигались и кривились, силясь произнести какое-то слово...

Когда последний солнечный луч скользнул по его неподвижному лицу, он не осветил на нем ничего, кроме высокого и мудрого таинства вечности...

В тумане времени

В 1858 г. английский собиратель древностей Г. Ринд приобрел в египетском городе Луксоре папирус, который ныне является одним из главных источников, дающих нам возможность судить о состоянии математических познаний древних египтян. По имени своего первого европейского владельца этот папирус известен сейчас всему миру как папирус Ринда.

Из текста папируса, выполненного иератическими письменами, можно заключить, что он был написан Ахмесом, придворным писцом фараона Раауса, около 1800 г. до н. э. Период в истории Египта, который приходится на это время, носит название Среднего царства. По словам самого писца, оригиналом для него послужил более древний папирус, относящийся, возможно, еще к Древнему царству (около 2700 г. до н. э.).

Папирус представляет собой ленту длиной 5,25 м и шириной 0,33 м. Это — не монография и не учебник в нашем понимании этого слова. Это, скорее всего, ученическая тетрадь, куда добросовестный ученик скрупулезно записывал все сведения, сообщенные ему его учителем, включая много и неверных.

Кроме папируса Ринда, который ныне хранится в Британском музее, есть еще Московский папирус, хранящийся в музее им. А. С. Пушкина. Длина московского папируса такая же, как и папируса Ринда, но он — в четыре раза у́же последнего. Есть еще несколько других математических папирусов, но все они своим содержанием уступают двум названным.

Из папирусов, из надписей на стенах храмов и усыпальниц, из факта строительства различного рода сооружений можно составить себе представление о математических познаниях египтян. И вот что при этом обнаруживается.

Египетская математика во многом отличается по своему характеру от современной, но для своего времени уровень ее был достаточно высоким. Египтяне, например, умели решать уравнения первой степени с одним неизвестным. Только не надо думать, что это — наши уравнения, в которых есть коэффициенты, неизвестное, обозначенное определенной буквой, знак равенства и неизменный нуль в правой части. Нет, никакой символики в то время не было, не было знака равенства, не было и нуля. А то, что мы называем уравнением, это — опре-

деленная, сформулированная полными словами последовательность действий, которые, если их перевести на наш язык, как раз и приводят к уравнениям. Рассмотрим, например, уравнение

$$8x = 19.$$

Решив его, получим $x = 19/8$. Итак, надо делить одно число на другое. Египтяне и делили, причем делали это довольно своеобразно. Они удваивали делитель 8 так, чтобы получилось число меньше 19, но чтобы сдедующее удвоение давало бы число больше 19. После этого число 8 делилось пополам до тех пор, пока не получалась единица. Такая единица обязательно получится в выбранном нами примере, так как делитель 8 представляет собой степень (третью) двойки. Это можно показать следующим образом:

$$\begin{array}{r} 8 — 1 \\ 16 — 2 \\ 4 — 1/2 \\ 2 — 1/4 \\ 1 — 1/8 \end{array}$$

Среди чисел, находящихся слева, выбираем те, которые в сумме дают 19. Это — 16, 2 и 1 ($16 + 2 + 1 = 19$). Берем сумму соответствующих им чисел из правого столбца: $2 + 1/4 + 1/8$. Это и есть частное. Такой способ деления получил название бинарной процедуры.

А как быть в случае, когда делитель не является степенью двух? Возьмем, например, дробь вида 33/7. Тогда поступали так. Пользуясь бинарной процедурой, делитель 7 удваивали столько раз, сколько надо, чтобы получить число меньше 33 и чтобы следующее удвоение привело к числу больше 33. Получали $33 = 4 \cdot 7 + 5$. Число 5 представляли в виде $2 \cdot 2 + 1$ и полагали $5/7 = 2\,(2/7) + 1/7$. Для чисел вида 2/7 существовали специальные таблицы разложений. Мы до сих пор не знаем, чем именно руководствовались древние египтяне при составлении этих таблиц. Все попытки найти закономерность в их составлении успеха не имели. Число 2/7, например, представляли следующим образом: $2/7 = 1/4 + 1/28$. Разлагали обязательно на дроби, числители которых равнялись единице. Такие дроби получали название аликвотных. У египтян не было общего

представления о рациональном числе, на дробь с числителем 1 они смотрели как на какое-то особое качество предмета, от которого бралась соответствующая часть.

Итак, 5/7 представляли как $5/7 = 2\,(1/4 + 1/28) + 1/7 = 2/4 + 2/28 + 1/7 = 1/2 + 1/14 + 1/7$. Тогда частное от деления 33 на 7 приобретало окончательно следующий вид:

$$33/7 = 28 + 1/2 + 1/14 + 1/7.$$

Умели египтяне вычислять и площадь круга. Если присмотреться к тому, как они это делали, то обнаружится, что в качестве π они брали довольно хорошее приближение этого числа: $\pi \approx 3{,}1605$. Это было большим приобретением, так как, например, их современники вавилоняне принимали π равным 3, что было уже совсем грубо. Однако площади четырехугольников неправильной формы египтяне находили, перемножая полусуммы противоположных сторон, что также было совсем грубо. Впрочем, вавилоняне в этом недалеко ушли от них.

Особенно поразительным представляется то, что египтяне совершенно точно могли вычислить объем усеченной пирамиды. Мы считаем этот факт поразительным потому, что для таких вычислений надо было достигнуть в математике более высокой ступени развития, чем это удалось египтянам. Этой ступени достигли впоследствии греки, о которых у нас речь впереди.

Сами греки, впрочем, о математических познаниях египтян отзывались очень высоко, часто ездили в Египет, чтобы учиться математике, и даже считали Египет родиной геометрии. От греков мы, в частности, узнали, что египтяне имели представление о теореме Пифагора, хотя в известных нам египетских текстах нет ни намека на то, что теорема Пифагора была им известна. Нигде о ней не говорит в своем папирусе и Ахмес.

Согласно греческим авторам, в Египте существовала особая категория землемеров, которых они — греки — называли гарпедонаптами, что в переводе означает что-то вроде «таскатели веревки» или «натягиватели шнурков». Эти гарпедонапты будто бы для построения прямых углов пользовались веревкой, разделенной узлами на 12 частей. Если из этих частей образовать треугольник со сторонами 3,4 и 5 частей, то угол между сторонами в 3 и 4 части будет прямым (в соответствии с обратной теоремой Пифагора — треугольник, сумма квадратов

двух сторон которого равна квадрату третьей, есть прямоугольный).

Все математические правила, которыми пользовались египтяне, имели сугубо эмпирический характер, никаких теорем, никаких доказательств у них не было.

Однако, несмотря на такой довольно примитивный характер египетской математики, она оказала плодотворное влияние на дальнейшее развитие нашей науки. Египтяне, как трудолюбивые муравьи, за тысячелетия своей истории накопили запасы математических знаний, которыми не без успеха для себя воспользовались математики последующих времен. Можно, без риска впасть в преувеличение, сказать, что если бы не было египетской математики, не было бы и последующей математики греческой.

Чем же отличается математика греков от математики народов, предшествующих им на исторической арене? Отличий — много, главных из них — два:

1. Греки придали математическим истинам тот самый абстрактный характер, который присущ современной нам математике.

2. Греки ввели в математику идею математического доказательства. Кто же стоял у истоков этой математики?

Дерзкий чужестранец

Немилосердное африканское солнце низвергало с небес потоки нестерпимо жарких ослепительных лучей. Все живое попряталось в тень, хоть немного умерявшую изнурительную жару. Вдали, на горизонте, в желтой дымке густой песчаной пыли клубилась бесконечная Ливийская пустыня. Вблизи, в густых зарослях папируса, скрывающих берега священного Хапи, застыли уродливые маски крокодилов и гиппопотамов...

Египет... Странная, непонятная, таинственная, дразнящая воображение и неудержимо манящая к себе страна. Загадочный, не похожий ни на одного из других обитателей Ойкумены народ. Как и когда он пришел в эту сказочную долину? Как вынашивал он свою удивительную, неповторимую цивилизацию? Кто, какие могучие силы сплотили его для того, чтобы он мог воздвигнуть эти гигантские, поражающие воображение пирамиды, чтобы он мог высечь из огромной скалы этого фантастического, таящего в себе тысячи неразгаданных тайн полульва, получеловека?..

Стоя в тени высоких колонн храма Изиды, Фалес с жадным любопытством всматривался и в величавую гладь застывшей в спокойном течении реки, и в слепящую желтизну необъятной пустыни, и в сфинкса с таким нечеловечески мудрым и вечным лицом. Вот уже два года, как он прибыл сюда из родного Милета, прибыл, чтобы разгадать его тайны, приобщиться к его изумительной, насчитывающей несколько тысячелетий культуре. Ни Сирия, ни Вавилон, где доводилось бывать прежде, не удивляли и не поражали так, как поражает вот эта лежащая перед ним страна. Там все было просто, все понятно, многое было знакомо с детства по рассказам посетивших эти страны людей. Здесь — все иное. Иные боги, иной уклад жизни, иные взгляды на вещи, иная философия — все, все иное. За два года он так и не сумел свыкнуться со всем этим, хотя многое, очень многое, успел узнать.

Он узнал, что в течение нескольких тысячелетий этот удивительный народ неустанно, с величайшим тщанием и бережливостью отбирал и сохранял все, даже мельчайшие драгоценные крупицы знания. Так старатель промывает скудную золотоносную жилу в поисках драгоценного металла! Он узнал, что иногда эти крупицы еще хранили в себе вкрапления грубой, неблагородной породы, однако все это, как величайшая святыня, хранилось в государственных и храмовых сокровищницах и тайниках. Хранителями были жрецы, и тяжкое горе ждало смельчака, который дерзнул бы притронуться к сокровищам. Сокровища были переданы стражам их предками и должны были сохраняться в неприкосновенности до скончания века.

Фалес вспомнил, как в один из таких же жарких и солнечных дней он вместе с главным жрецом храма проходил мимо пирамиды Хеопса.

— Знает ли кто-нибудь, какова высота пирамиды?— спросил он жреца.

— Нет, сын мой,— ответил жрец.— Древние папирусы не открыли нам этого, а наши сегодняшние знания не позволяют нам судить об этом даже приблизительно.

— Однако же это можно определить совершенно точно даже сейчас.

— Боги свидетели, что ты ошибаешься, мой сын,— все еще улыбаясь, но со снисходительной недоверчивостью посмотрев на него, сказал жрец Изиды.—

Что дает тебе основание говорить об этом с такой уверенностью?

— Свойства подобных треугольников,— ответил Фалес.— Вот смотри. Мой рост — три вавилонских царских локтя. А вот моя тень. Видишь, тень от головы доходит как раз до того камня. Я измеряю расстояние от середины ступни до камня — оно также в точности равно трем царским локтям. И какой бы предмет ты ни взял,— сейчас, именно в это время дня, тень от этого предмета, если ты поставишь его вертикально, будет как раз равняться длине предмета. Сам такой вертикально поставленный предмет и его тень образуют прямоугольный равнобедренный треугольник. Знай же, что все прямоугольные равнобедренные треугольники подобны друг другу. А теперь смотри, куда достигает тень от пирамиды. Измеряем длину этой тени от основания пирамиды, прибавляем к ней половину этого основания и получаем высоту. Обрати внимание на то, что основание — точный квадрат, а тень как раз перпендикулярна к стороне этого квадрата.

Фалес вынул из-под белого хитона тонкую веревку, разделенную узлами на равные части. Расстояние между каждой парой узлов в точности равнялось одному вавилонскому локтю. Он никогда не расставался с нею с тех пор, как после двух разливов Нила целыми днями бродил с гарпедонаптами по не успевшей просохнуть земле и вместе с ними, учась у них и одновременно уча их, размежевывал сплошь затянутое илом поле.

Фалес закрепил веревку у конца тени и протянул ее к середине ближайшего основания пирамиды. Получилось пятьдесят шесть локтей. Прибавив затем к найденной длине двести семь локтей — половину измеренного еще жрецами основания, он подошел к терпеливо наблюдавшему за ним жрецу.

— Двести шестьдесят три локтя,— сказал он, вытирая полой хитона обильно струившийся с лица пот.— Точно такую высоту имеет пирамида.

Долго безмолствовал главный жрец храма Изиды. Наконец, подняв свои бесцветные, ставшие колючими глаза, он произнес с холодностью, совершенно не свойственной ему прежде:

— Чужестранец. Я вижу, что ты мудр и многоопытен. Ты видишь то, что иногда остается скрытым от нас. Ты много размышлял и во многое проник. Но знания

твои почерпнуты не от светлых богов Египта. От халдейских каббалистов и сирийских чернокнижников перенял ты тайны познания сути вещей. Берегись этих тайн. Берегись и не разглашай их. Ибо многое неугодно богам в твоих кощунственных знаниях. Многое из того, чем владеешь ты, должно быть сокрыто от смертного. Бойся богов, дерзкий чужестранец! Бойся и знай, что быть растерзанным дикими псами — это еще не самое страшное из того, что тебя может постигнуть.

Повернувшись спиной к Фалесу, жрец быстро зашагал прочь и вскоре скрылся под высоким порталом храма Изиды.

«Загадочная страна,— продолжал думать Фалес.— Загадочная и опасная. Опасно прогневить её богов, но еще опаснее — их служителей. Но почему они с таким непостижимым упорством отвергают все, что не внесено в их таинственные папирусы?»

Выйдя из тени, он, не обращая внимания на немилосердно палящие лучи солнца, с непокрытой головой направился к реке.

Расплата за силу

Ни одной строчки из сочинений Фалеса до нас не дошло. То, что о нем говорят, нам известно со слов лиц, которых отделяли от Фалеса сотни лет. Можно ли поручиться в том, что сведения, сообщаемые этими лицами, лишены домыслов и откровенного прикрашательства? Очевидно, поручиться нельзя, приходится сознаться, что мы просто принимаем их на веру.

Фалеса называют Милетским по той причине, что он происходит из города Милета, центра древнегреческой провинции Ионии, находившейся в Малой Азии. Он был основателем философской школы, которую по той же причине называют ионийской. К числу представителей этой школы принадлежали такие выдающиеся древнегреческие философы, как Анаксимандр и Анаксимен.

Жил Фалес в VII—VI ст. до н. э. Историческая традиция причисляет его к так называемым семи греческим мудрецам. Шестью другими был Биант, Питтак, Клеобул, Периандр, Хейлон, Солон. Происходил Фалес из купеческой семьи. По примеру своих сверстников, в молодости он много путешествовал. Побывал он и в Египте, где, говорят, очень удивил местных жрецов, подсчитав высоту пирамиды Хеопса, не влезая на нее.

Рассказывают также, что он мог вычислить подобным же образом и расстояние до кораблей, находящихся в море. В основе, как полагают, было использование свойств подобных треугольников.

Греческие авторы, жившие после Фалеса, говорят, что им была открыта идея математического доказательства. Как, каким образом это было сделано,— об этом можно лишь догадываться. Очевидно, Фалес, размышляя о природе вещей, обратил внимание на их всеобщую связь между собой и на то, что эта связь зафиксирована в человеческом мозге. Тогда, например, если мы путем непосредственных измерений установили, что один отрезок больше другого, а другой — больше третьего, то не надо уже сравнивать первый и третий отрезки — наш мозг и без этого сравнения подскажет нам, что первый больше третьего.

Таким образом, можно лишь часть истин брать непосредственно из практики, а другие, связанные с ними, можно получать путем логических рассуждений, уже без непосредственного обращения к этой практике. В конечном счете это есть тоже обращение к практике, так как те связи между вещами, которые нашли свое отражение в мозге, точнее — сам факт такого отражения, есть результат практической деятельности многих поколений людей.

Те истины, которые непосредственно найдены из практики и положены в основу формальных рассуждений, были названы впоследствии аксиомами, истины же, выведенные из них с помощью этих рассуждений,— теоремами. Формальной логики, с помощью которой из аксиом получаются теоремы, еще не было, были лишь начатки ее, позволившие Фалесу прийти к его гениальной догадке.

Мы не знаем, какие именно аксиомы были сформулированы Фалесом, нам известны лишь некоторые элементарные теоремы, которые, возможно, доказал Фалес, а именно:

1. Диаметр делит круг на две конгруэнтные части.
2. Всякая хорда круга, отличная от диаметра, короче этого диаметра.
3. Вертикальные углы равны между собой.
4. Треугольники, имеющие соответственно равными сторону и прилежащие к ней углы, равны между собой.

Открытие идеи доказательства неразрывно связано с приданием математическим объектам абстрактного характера. Можно даже сказать, что второе предшествовало первому. Как мы уже говорили, нет необходимости проверять на практике, что первый отрезок больше третьего, если установлено, что первый больше второго, а второй больше третьего. В рассуждении, приводящем к сравнению длин первого и третьего отрезков, сами отрезки и их длины выступают уже как представители некоторых более общих понятий. Геометрические объекты теряют уже свой конкретный вид и становятся абстрактными объектами произвольной природы, подчиненными формально-логическим условиям. Выводы геометрии приобретают общий характер, они становятся справедливыми для очень широких классов объектов. Но эта широта оборачивается своей другой, в известном смысле неприятной, стороной — эти выводы надо доказать, ибо то, что представляется очевидным, легко проверяемым для конкретных объектов, перестает быть таковым, когда мы переходим к объектам более общим. Доказательство теорем, необходимость этого доказательства — это своеобразная расплата за общность математических рассуждений...

О Фалесе как человеке мы знаем очень мало. Гораздо больше — о его младшем современнике Пифагоре Самосском. Пифагор — создатель математической школы, в которой математика выступает уже в том самом виде, какой она начала принимать у Фалеса. Числа, свойства которых изучали пифагорейцы, — это не количество мер зерна или кошек в доме, как у египтян. Число у пифагорейцев — это абстрактное математическое понятие, объект специального научного исследования. Точно так же геометрическая фигура — это не пирамида — усыпальница фараона и не поле, засеянное пшеницей. Это снова-таки чисто геометрическое понятие, изучаемое не с конкретной целью (например, с целью подсчета получаемого с этого поля урожая), а как таковое, представляющее интерес само по себе. Математика вступила (и не могла не вступить) в следующий этап развития. Таков закон эволюции, закон жизни: начало — в практической деятельности человека, продолжение — в абстрактной теории. Со временем выводы теории будут приложены к практике, но это будет уже практика более высокого сорта, чем та, с которой все началось.

Рассматриваемая нами ситуация иллюстрирует известные слова В. И. Ленина о том, что познание объективной истины идет от живого созерцания к абстрактному мышлению и от него — к практике...

Итак, Пифагор.

Смерть в Метапонте

Сонную тишину ночного Метапонта прорезал острый крик. Послышалось падение на землю тяжелого тела, топот убегающих ног, и все смолкло.

Когда ночной караул прибыл на место происшествия, то в колеблющемся свете факелов все увидели на земле распростертого старца и неподалеку от него — мальчика лет 12 с лицом, перекошенным от ужаса.

— Кто это? — спросил начальник караула у мальчика.

— Это Пифагор,— ответил тот, не меняя выражения широко раскрытых испуганных глаз.

— Кто такой этот Пифагор? Среди жителей города нет гражданина с таким именем.

— Мы недавно прибыли из Кротона. Мой господин должен был скрываться от врагов и выходил только ночью. Они выследили его и убили.

— Сколько их было?

— Я этого не успел заметить в темноте. Они отбросили меня в сторону и накинулись на него.

Начальник караула стал на колени и приложил ухо к груди старца. Несколько мгновений прошло в полном молчании.

— Конец,— сказал начальник, поднимаясь с колен и отряхивая пыль с потертого шерстяного хитона.— Тень старика уже направилась в Аид и сейчас, вероятно, торгуется с Хароном о перевозе через Стикс. Расскажи нам о своем господине.

Так, вероятно, закончил свои дни замечательный греческий мудрец. Было ему в то время 80 лет, а позади оставалась бурная и интересная, полная опасностей и приключений жизнь.

Кто же такой этот Пифагор, с именем которого знаком сейчас каждый грамотный человек?

Числа добрые и числа злые

При имени Пифагора каждый, очевидно, прежде всего представляет себе его знаменитую теорему, согласно которой сумма квадратов катетов прямоугольного треугольника равна квадрату его гипотенузы. Открыл ли Пифагор что-либо иное, кроме этой теоремы,— знают немногие, но о принадлежности теоремы именно Пифагору знают все.

Но вот что более всего удивительно — мы даже не можем с полной уверенностью сказать, жил ли в действительности на свете Пифагор. О нем рассказывают столько небылиц, что лишь наивный человек согласится принять их все на веру. Судите сами. Однажды, гуляя, Пифагор подошел к реке. Река тотчас же вышла из берегов и закричала (!): «Да здравствует Пифагор!»

Мы знаем лишь, что в VI ст. до н. э.— время, к которому относят жизнь и деятельность Пифагора,— в Древней Греции существовала большая философско-математическая школа, последователей которой называли пифагорейцами. Все, что делалось в этой школе, было скрыто под покровом тайны и мистики. Все полученные ими результаты пифагорейцы, следуя какому-то взятому на себя обязательству, приписывали одному и тому же лицу — своему божественному учителю Пифагору. Весьма вероятно, однако, что никакого «божественного» учителя в действительности не существовало.

В истории человеческого общества с подобными явлениями приходится сталкиваться не раз. Так, например, и в наши дни некоторая группа французских математиков все свои труды выпускает под одним и тем же

именем — Никола Бурбаки. Все знают, что никакого математика с этим именем нет, но все охотно играют в ту же самую игру, в какую играют и члены упомянутой группы, и в своих высказываниях ссылаются не на группу в целом, а на одно (!) лицо — Бурбаки.

А вспомним всем известного Козьму Пруткова. В прошлом веке трое русских писателей — братья Жемчужниковы и Алексей Константинович Толстой — создали образ этакого несокрушимого резонера, умевшего с потрясающим глубокомыслием изрекать прописные истины. Они же сочинили и биографию Козьмы Пруткова.

Однако если сейчас мы знаем, что ни Бурбаки, ни Козьма Прутков не есть реально существующие или существовавшие личности, то в случае с Пифагором мы такой уверенности не имеем, так как нас отделяет от рассматриваемого времени промежуток в две с половиной тысячи лет. Мы можем лишь сказать: не исключено, что Пифагора как человека и не было. Однако мы твердо уверены в следующем: теорема, носящая имя Пифагора, была открыта за тысячу с лишним лет до него вавилонянами. Возможно, как уже говорилось, с этой теоремой были знакомы и египтяне. Не исключено, что пифагорейцы открыли свою теорему независимо от вавилонян или египтян, но бесспорно то, что приоритет в этом принадлежит не им.

Любопытно, что хоть мы и не можем сказать с уверенностью, жил ли в действительности Пифагор, мы имеем довольно подробную и интересную его биографию. Говорят, что Пифагор родился в 580 г. до н. э. на острове Самосе. По этой причине его называют Пифагором Самосским с тем, чтобы его не путали с другим Пифагором, которого называют Пифагором Регийским и который был скульптором (кстати, этот последний Пифагор тоже родился на Самосе, но жил и работал в городе Регии). По примеру многих богатых молодых людей своего времени, в юные годы Пифагор много и с пользой для себя путешествовал. Он побывал в Вавилоне, в Леванте, в Египте. В то время, когда он находился в Египте, эту страну завоевал персидский царь Камбиз. Пифагор был в числе других взят в плен у стен одной из великих египетских пирамид. Возможно, что, как и другие, он был на какое-то время обращен в рабство. Однако слава его как мудреца и мага была уже в то время столь велика, что когда царь Камбиз узнал,

кто оказался его пленником, он приказал немедленно освободить Пифагора и, надо полагать, принес ему самые горячие извинения.

Когда Пифагор вернулся в родной Самос, его встретили, как великого ученого и чародея. Говорят, что со времен своих странствий по Востоку он усвоил обыкновение носить пышную восточную одежду, какую носили в то время халдейские жрецы. Одним из основных элементов этой одежды был роскошный тюрбан. На одном из портретов Пифагор изображен в виде этакого могучего Геркулеса с пышным экзотическим убором на голове. Впрочем, Пифагор ли на нем изображен (если даже допустить, что Пифагор был) — этого тоже никто не может сказать с уверенностью.

Вокруг мудреца стала группироваться молодежь острова, главным образом выходцы из аристократических семей. Составилась школа. Все в этой школе, на восточный манер, было окружено мистикой и тайной. Рассказывают, например, что не все последователи Пифагора имели право видеть своего божественного учителя. Те, кто имел право и видеть его, и слышать,— это были ученики в полном значении этого слова. Те же, кто имел право только слышать, но не видеть, назывались акусматиками. В соответствии с этим досужие авторы выдуманных подробностей биографии Пифагора сообщают, что комната, в которой учил Пифагор, делилась полотняной перегородкой на две половины. В одной, где находился сам учитель, сидели ученики, другая была предоставлена акусматикам.

Чем занимались в школе? Главным образом философией и математикой. Во времена древних греков эти две науки не столь разнились между собой, как это мы наблюдаем сейчас. Каждый философ был, как правило, и математик и наоборот. У пифагорейцев, однако, эта философия-математика имела этакий трансцендентально-мистический характер, где было очень много и от метемпсихоза (мистического учения о переселении душ), и от халдейской каббалистики (учения о мистических свойствах чисел) и т. д.

Однако молодым людям, группировавшимся вокруг Пифагора, мало было заниматься только наукой. Вскоре они стали вмешиваться в политическую жизнь острова, идя наперекор действиям самосского тирана Поликрата. Слово «тиран» в те времена еще не имело того

нарицательного смысла, который оно приобрело впоследствии. Тиран нередко был выразителем интересов демоса — народа и тем самым противостоял аристократам. Поликрату не понравились аристократические поползновения пифагорейцев, и вскоре их школа была разгромлена. Мистики-математики вместе со своим божественным учителем вынуждены были бежать с острова. Возможно, они расселились по всему Средиземноморью. Большая их часть осела в так называемой Великой Греции. Так называлась южная часть Апеннинского полуострова и остров Сицилия. Сам Пифагор поселился в Таренте, где снова оказался во главе школы. Вокруг него так же, как и на Самосе, группируется молодежь, однако эту школу постигает та же участь, что и самосскую. Пифагор переселяется в Кротон, оттуда бежит в Метапонт и там, как уже говорилось в начале нашего рассказа, погибает в одной из уличных ночных схваток в возрасте 80 или даже 90 лет.

А теперь обратимся к тем научным исследованиям, которыми занимались пифагорейцы.

Одной из излюбленных областей математики у пифагорейцев была теория чисел. При этом их интересовали именно такие свойства чисел, которые соответствовали их мистической, сдобренной восточной каббалистикой философии.

Пифагорейцы считали, что все в мире подчинено тем же законам, которым подчинены и отношения целых чисел. Они обнаружили, что струны, отношения длин которых при равном натяжении равны отношениям таких натуральных чисел, как 2 : 3, 3 : 4 и т. д., издают при одновременном звучании аккорд. Это частное явление они распространили и на всю Вселенную. Так, согласно их учению, Земля, Луна, все известные в то время планеты и Солнце вращаются по сферам вокруг некоторого центрального огня. Радиусы этих сфер имеют такие же отношения, как и длины струн, издающих аккорды. Такие же аккорды будто бы издают при своем движении и все перечисленные космические тела. Возникает этакая вселенская гармония сфер.

Хоть космологические построения пифагорейцев носили мистически-туманный характер, в основе их лежала правильная идея о вращении Земли вокруг некоторого центра. Правда, центром этим было не Солнце, а какой-то несуществующий центральный огонь.

Все целые числа пифагорейцы делили на добрые и злые. Добрые — нечетные, злые — четные. Единица, считалось, несет в себе и доброе, и злое начала, так как прибавление ее к доброму — нечетному — числу делает его злым, а прибавление к злому — добрым.

Многие из идей пифагорейцев получили дальнейшее развитие в математике. Многие задачи, которые естественно вытекали из теоретико-числовых исследований пифагорейцев, привели к очень важным и трудно получаемым результатам.

И вот, наслаждаясь этакой вселенской гармонией целых чисел, пифагорейцы, как громом среди ясного неба, были поражены тем, что, оказывается, существуют такие числа, которые не могут быть представлены в виде отношения целых чисел. Одним из таких чисел является, например, $\sqrt{2}$. Как пришли пифагорейцы к этому числу?

Чтобы ответить на этот вопрос, давайте снова вернемся к теореме Пифагора. Как мы помним, сумма квадратов катетов прямоугольного треугольника равна квадрату гипотенузы. Возьмем, в частности, равнобедренный прямоугольный треугольник, каждый катет которого равен единице. Тогда, в соответствии с упомянутой теоремой, квадрат гипотенузы равняется 2, а потому сама гипотенуза — $\sqrt{2}$. Но $\sqrt{2}$ невозможно представить в виде отношения двух целых чисел. Сейчас уже известно, что это число — иррациональное. Сами пифагорейцы, очевидно, ясного представления об иррациональности не имели, но они осознали тот факт, что есть отрезки, длины которых нельзя приравнять к отношению целых чисел. Это открытие в корне противоречило их «целочисленной» философии. Что им оставалось делать? Ничего, кроме того, что они придумали. Они постарались скрыть от непосвященных свое открытие. Иррациональных чисел нет! Нет, и все! Есть лишь целые числа и их отношения!

Однако, скрывай не скрывай, долго этого открытия не утаишь. Прошло некоторое время, и тайна иррационального числа стала известна людям, не являвшимся учениками Пифагора. Говорят, что эту тайну разгласил один из учеников Пифагора по имени Гиппас Метапонтский (или Месапонтский). Это было, с точки зрения пифагорейцев, чудовищное преступление! Ведь каждый из них, вступая в школу, давал торжественную клятву свято хранить в тайне все, что будет получено в школе.

И вот находится нечестивец, который эту клятву нарушил. Как с ним поступить? Пифагорейцы прибегли к помощи богов. В то время, когда корабли Гиппаса, груженные богатыми товарами, возвращались в родную гавань, бог морей Посейдон наслал на них страшную бурю. Буря сначала разметала корабли, после чего потопила их, а вместе с ними их владельца. Такова легенда, которую, конечно же, создали сами пифагорейцы.

Трудно, очевидно, вообразить себе египтянина, который бы столь огорчился, узнав, что какая-то длина не выражается отношением целых чисел. Он еще просто не дошел до той математики, в которой подобные факты рассматриваются как факты, имеющие принципиальное значение. Во времена Пифагора принципиальная важность этих фактов была в полной мере осознана. В эти времена родился интерес и к тем задачам, которые мы рассматриваем ниже. Эти задачи можно счесть ничтожными с точки зрения их практической ценности, но они оказываются очень важными и нужными в математике как научной теории.

Не следует думать, что отсутствие возможности непосредственно извлечь пользу из того или иного научного факта делает этот факт лишь достоянием теории. Сама теория является порождением практической деятельности человека, и то, что ценно для теории, в конечном счете важно и для практики в самом непосредственном значении этого слова.

Темница у моря

В лето ... года от первой олимпиады Анаксагор был брошен в темницу. Философ помимо своей воли оказался втянутым в недостойную политическую борьбу. Повод был поистине смехотворным: ученый утверждал, что Солнце, лучезарное дневное светило, вовсе не бог Гелиос, а раскаленный шар величиной с полуостров Пелопоннес. В действительности же причина была совсем иной. Анаксагор был другом и учителем когда-то всесильного, но начинающего терять свою власть вождя афинского демоса и стратега Перикла. Для того чтобы свалить политического противника, не погнушались никакими средствами. Философ допустил неосторожное выражение? Предать его суду, упрятать за решетку, доказать, что его преступление достойно смертной казни! Перикл не останется безучастным к судьбе своего друга. В сложных

сетях политических интриг можно будет запутать и Перикла и в конце концов вырвать у него власть.

Есть ли, однако, на земле силы, способные подавить дух вольнодумца и вольнолюбца? Можно ли заставить мыслителя не думать? Мысль всегда свободна, и на городской агоре, и за толстыми тюремными засовами...

Анаксагор стоит у зарешеченного толстыми прутьями окна тюремной камеры, и перед его мысленным взором бесконечной чередой, сменяя друг друга, проплывают картины как безмерно далеких, так и совсем недавних времен. Вот так же тянулось прежде, вот так же тянется сейчас ко всему равнодушное бесконечное время. День за днем, год за годом, столетие за столетием... Сухие потрескавшиеся камни тысячи лет стонут под жестоким, немилосердным солнцем. И море... Широкое, безбрежное море. Как одно гигантское зеркало по утрам и как мириады сверкающих зеркал в полдень, каждое из которых блестит и слепит глаз своим особенным, трепетно мятущимся светом. Зеленые волны то с еле слышным плеском тихо накатываются на прибрежную гальку, то с неумолчным ревом бьются и пенятся над темными подводными скалами. Сегодня и завтра, сегодня и завтра... Всегда...

Философ отходит от окна, делает несколько шагов по камере и останавливается перед грубо вытесанным куском мрамора, заменяющим ему стол. На мраморе в различных и часто неожиданных сочетаниях углем

изображены круги с вписанными в них многоугольниками, квадраты, сегменты, серпики... Несколько минут Анаксагор присматривается к этому множеству геометрических фигур, потом берет в руки уголь и в задумчивости добавляет к ним несколько линий...

Великие задачи

Говорят, что, находясь в темнице, философ скрашивал томительное бездействие размышлениями над задачей о квадратуре круга и тем, что с нею связано. Это была одна из тех задач, которые последующие поколения назвали великими. Чем же примечательна эта задача, чем примечательны другие великие задачи?

Об этих задачах написаны сотни работ (см. список литературы в конце книги).

Сейчас же ограничимся самыми общими словами и прежде всего приведем формулировки задач.

1. Задача о квадратуре круга: требуется построить сторону квадрата, площадь которого равна площади данного круга.

2. Задача об удвоении куба: требуется построить ребро куба, объем которого в два раза больше объема данного куба.

3. Задача о трисекции угла: требуется разделить произвольный угол на три равные части.

Оговоримся, однако, что если бы задачи были сформулированы точно так, как это сделано у нас, то никакими великими они бы не стали — задачи решаются множеством способов, и многие из таких способов знали уже сами греки. Нужно было не просто решить задачи, но решить, не прибегая к помощи иных инструментов, кроме циркуля и линейки.

Почему греки предпочитали циркуль и линейку другим инструментам? Ответить на этот вопрос однозначно и в достаточной степени убедительно мы не можем. Потому ли, что циркуль и линейка являются наиболее простыми инструментами? Может быть, и так. Однако можно назвать множество инструментов, столь же простых, как циркуль и линейка, или почти столь же простых. С помощью некоторых из них и решаются сформулированные задачи.

Оказалось, что именно в бесчисленных попытках решить задачи циркулем и линейкой было получено много

ценного материала, который имеет непосредственное практическое значение, и практическая важность самих задач отступила на дальний план.

Математика обладает чудесной особенностью, выделяющей ее из других наук: если в ней потянуть за какое-то звено, то можно вытянуть всю цепь ее фактов — как предшествующих выбранному звену, так и следующих за ним. Роль одного из звеньев в развитии математики сыграли и великие задачи. Взяв это звено, можно усмотреть генетическую связь между ним и очень многими областями как старой, так и новой математики.

Мы оставили Анаксагора у грубо отесанного куска мрамора за толстыми тюремными решетками глубоко задумавшимся над задачей о квадратуре круга. По общему мнению, из трех перечисленных задач эта задача — одна из наиболее древних. Какие соображения могли привести к ее возникновению? Уверенно ответить на этот вопрос мы также не можем. Можно высказать лишь несколько более или менее правдоподобных догадок.

Прежде всего задача представляется естественной с точки зрения самой элементарной логики математического мышления. В самом деле, с одной стороны, имеем круг как первую фигуру, с которой приходится сталкиваться, когда получаешь в руки циркуль. С другой стороны, есть еще одна совершенно естественная фигура — квадрат. Каждая из этих фигур имеет вполне определенную площадь. Между двумя такими фигурами с одинаковыми площадями можно естественно протянуть мостик — преобразовать одну из них в другую. Поскольку же преобразовывать можно было только циркулем и линейкой, то и могла возникнуть задача о том, чтобы с помощью циркуля и линейки построить сторону квадрата, площадь которого равна площади данного круга. Но это и есть задача о квадратуре круга.

А могло быть и иначе — к мысли о квадратуре круга могли прийти не непосредственно, а через ряд промежуточных звеньев. Так, теорема Пифагора справедлива не только для квадратов, построенных на катетах и гипотенузе, но и для любых подобных фигур, построенных на этих отрезках. В самом деле, если a, b, c — соответственно длины катетов и гипотенузы, а A, B, C — площади построенных на них подобных фигур, то, как известно,

$$\frac{A}{a^2} = \frac{B}{b^2} = \frac{C}{c^2} = \lambda.$$

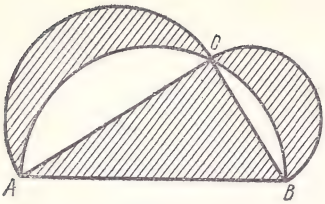


Рис. 1

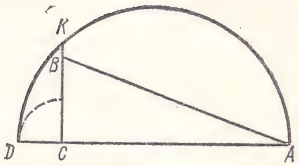


Рис. 2

(Через λ мы обозначили величину общего отношения). Отсюда

$$A + B = \lambda(a^2 + b^2) = \lambda c^2 = C,$$

что и доказывает утверждение.

В частности, сумма площадей двух полукругов, построенных на катетах, равна площади полукруга, построенного на гипотенузе (катеты и гипотенуза являются диаметрами соответствующих полукругов). Но в таком случае, как видно из рис. 1, сумма площадей двух заштрихованных серпиков равна площади заштрихованного прямоугольного треугольника. Рис. 1, на котором изображены полукруги, построенные на катетах и гипотенузе, выполняется с помощью циркуля и линейки. Каждый из серпиков представляет собой фигуру, известную в математике под именем луночки Гиппократа. Название связано с именем древнегреческого математика Гиппократа Хиосского, жившего в V ст. до н. э. и, в частности, занимавшегося отысканием площадей таких луночек.

Таким образом, с помощью циркуля и линейки фигуру, составленную из двух луночек Гиппократа, можно превратить в равновеликий им прямоугольный треугольник, который затем легко может быть преобразован, также с помощью циркуля и линейки, в равновеликий ему квадрат. Операция нахождения стороны квадрата, площадь которого равна площади прямоугольного треугольника, представлена на рис. 2. На нем изображен треугольник ABC с катетами $BC = a$, $AC = b$. Строим отрезок $AD = b + \frac{a}{2}$ и на нем как на диаметре — полуокружность. Пусть последняя пересекает катет BC или его продолжение в точке K. Тогда CK — сторона искомого квадрата, поскольку

$$CK^2 = AC \cdot CD = b \cdot \frac{a}{2}.$$

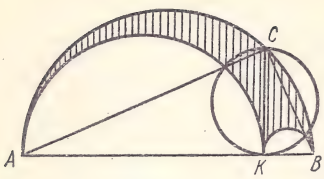


Рис. 3

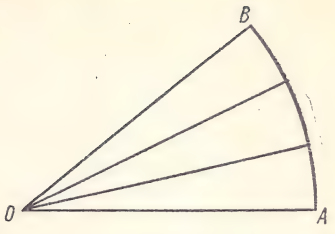


Рис. 4

Рассмотрим рис. 3, на котором изображены прямоугольный треугольник ABC, его высота CK, проекции AK и KB катетов на гипотенузу. На этих проекциях и на гипотенузе построены полуокружности. Заштрихованная фигура, образованная такими полуокружностями, напоминает древнегреческий сапожный нож арбелон, поэтому и задача об отыскании площади такой фигуры получила название задачи об арбелоне. Обратим внимание на то, что арбелон образован дугами трех окружностей, следовательно, может быть рассматриваем как некоторая обобщенная луночка Гиппократа. Этот рисунок может быть также выполнен с помощью циркуля и линейки.

Рассмотрим круг с диаметром CK, пусть k — площадь круга, a — площадь арбелона.

Справедливы следующие равенства:

$$k = \pi\left(\frac{CK}{2}\right)^2,$$

$$a = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{AK+KB}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\pi\left(\frac{AK}{2}\right)^2 -$$

$$- \frac{1}{2}\pi\left(\frac{KB}{2}\right)^2 = \pi\frac{AK\cdot KB}{4}.$$

Но

$$CK^2 = AK\cdot KB,$$

следовательно,

$$a = k.$$

Таким образом, с помощью циркуля и линейки некоторые обобщенные луночки Гиппократа (арбелон) можно превратить в равновеликий им круг.

Отсюда естественно могла возникнуть мысль: а нельзя ли через посредничество луночек Гиппократа прев-

ратить круг в равновеликий ему квадрат. Ведь с точки зрения логики математических ассоциаций вероятность подобной последовательности рассуждений достаточно велика.

Почему возникла задача о делении угла на три равные части? Вероятно, потому, что на такое число частей приходилось делить произвольный прямолинейный отрезок. Это деление выполняется достаточно просто, как просто выполняется деление не только на три, но и на произвольное число частей. Снова математические ассоциации естественным путем приводят к мысли о возможности перенесения операции деления с отрезка прямой на иные геометрические образы. В данном случае, рассматривая угол как центральный, мы можем представить задачу о делении угла на три равные части как задачу о делении на такие части дуги окружности, на которую угол опирается (рис. 4).

Итак, можно или нельзя с помощью циркуля и линейки разделить на три равные части дугу окружности?

Задача об удвоении куба носит еще название делосской, или делийской задачи. С ее возникновением связывают обычно легенду о разразившейся на острове Делосе чуме и об условии, которое поставил оракул в храме Аполлона перед делосцами, молившими божество об избавлении от лихой беды. Вероятно, было это так.

Геометрия и Аполлон

...Боги бывают милостивыми, но чаще всего они злы. Злоба их не имеет границ. За вину одного расплачиваются многие. А часто и вины никакой нет. Вины нет, а наказание есть...

День за днем гибли и гибли люди на острове Делосе. Чума, как незваная гостья, нагло заходила в каждый дом и пятнала своей костлявой рукой каждую семью.

Все дни неумолчно ревет море. Попрятались птицы, укрылись в горах звери. Гигантские волны, обрушиваясь на прибрежные скалы, приносили с собой запах тлена, запах смерти...

Горе, страшное горе нависло над Делосом. За что прогневались боги? Какую жертву требуют они?

Почему молчит оракул? Почему спит Пифия? День сменяется ночью, ночь — еще более тягостным днем, а спасенья все нет и нет.

Наконец, после долгих дней непрерывного сна, прорицательница пробудилась. Она сидела у входа в пещеру, из глубины которой неслись густые, тлетворные миазмы. Ее длинные, всклокоченные, нечесаные волосы развевались на ветру, как бесчисленные змеи на голове Медузы Горгоны. Под действием вредоносных испарений Пифия впала в состояние транса и начала выкрикивать слова, смысл которых не был понятен непосвященным. Этот смысл могли разгадать только жрецы, да и то лишь после того, как сверялись со старыми книгами.

На этот раз смысл бессвязного бормотания Пифии был таков: Аполлон, божественный покровитель острова, требовал удвоить алтарь в его храме. На этом алтаре по особо торжественным праздникам верховный жрец храма приносил кровавые жертвы.

Требование поначалу показалось очень простым. Измученные изнурительным бедствием делосцы бросились в каменоломню и после нескольких дней лихорадочного труда выточили из громадного куска гранита куб, в точности равный храмовому алтарю.

Обвязав камень веревками, обессиленные люди впряглись в лямки и поволокли его к храму. С неимоверными усилиями подняли его на старый жертвенник и укрепили. Желание бога было выполнено — объем нового жертвенника был точно вдвое больше объема старого. Жители ликовали...

Однако радость оказалась преждевременной. Неумолимая, незваная гостья по-прежнему ходила из дома в дом, и по-прежнему воздух оглашался воплями и стенаниями. Что же бог? Чего же он хочет еще? Разве они не сделали того, что он просил?

Вновь поднялась на высохших ногах старая прорицательница и вновь уселась у входа в священную пещеру. И опять, как прежде, извивались на ветру ее нечесаные волосы, похожие на бесчисленных змей Горгоны, и опять тяжелые испарения окутали ее и помутили рассудок. Снова полились бессвязные выкрики и бормотания. Жрецы открыли свои божественные книги и стали искать смысл того, что им передала Пифия в своем горячечном бреду. На этот раз смысл прорицания был таков: удвоить жертвенник, не меняя его формы.

Не раздумывая, как и в первый раз, бросились воспрявшие духом делосцы в каменоломню.

Однако на этот раз дело оказалось намного труднее, чем прежде. Кто-то предложил выточить куб, ребро которого точно в два раза больше ребра храмового алтаря. Однако тут же это предложение было высмеяно — объем такого куба будет не в два, а в восемь раз больше объема куба, стоящего в храме. Несколько каменщиков взялись выточить куб с объемом, лишь приблизительно вдвое превосходящим объем куба, выточенного ими же несколько дней назад. И это было отвергнуто — богу надо было дать точное решение.

После целого ряда бесплодных попыток решить задачу несколько человек вызвались съездить в Афины, чтобы посоветоваться с тамошними математиками.

Посланные возвратились через несколько дней. Некто Гиппократ с острова Хиоса, находившийся в то время в Афинах, предложил найти ребро искомого куба как первое из двух средних пропорциональных между двумя величинами, из которых одна — ребро куба, стоящего в храме Аполлона, вторая — вдвое больше ее.

И вновь застучали молотки. Через несколько дней новый жертвенник был готов. Тащить его в храм пришлось значительно большему числу людей, чем в первый раз. Убрали два старых куба и на их место водрузили новый.

...И на этот раз жестокий бог обманул надежды несчастных делосцев. Смерть беспощадной рукой продолжала косить ни в чем не повинных людей. Чего же

еще надо жестокосердному Аполлону? Разве мало ему тех жертв, что уже принесены? Разве они не старались во всем следовать его велениям?

В третий раз поднялась высохшая, как безжизненная олива, Пифия и заняла свое место у пещеры. В третий раз измученные жители острова с болью и надеждой прислушивались к каждому ее вздоху.

Веление, которое в этот раз передал Аполлон, было таково: куб был построен с использованием недопустимых инструментов. Надо было это сделать, не прибегая ни к какой иной помощи, кроме циркуля и линейки. Только эти инструменты божественны. Все остальные не достойны того, чтобы с их помощью исполнять волю богов.

Черный мрак вновь опустился над Делосом...

Несмотря на все усилия, которые предпринимались, все три задачи решению не поддавались. В чем дело? В том ли, что за них брались люди бездарные? Нет, решить их пытались и многие выдающиеся математики. Тогда, может быть, задачи просто не имеют решения?

Мы увидим позднее, что это было действительно так. Однако в античные времена об этом можно было только догадываться, дать же ответ на вопрос, так это или не так, не умели — математика все еще оставалась не настолько развитой наукой для того, чтобы отвечать на подобные вопросы.

Циркулем и линейкой задачи решены не были. Однако если не ограничиваться указанными инструментами, то их можно было решить, т.е. построить сторону квадрата, равновеликого кругу, разделить на три равные части произвольный угол, построить ребро куба, объем которого в два раза больше объема данного куба. Эти решения не будут, конечно, полностью соответствовать поставленным требованиям, но их можно рассматривать как определенное приобретение в математике. В частности, в процессе отыскания таких решений был открыт целый ряд в высшей степени важных и интересных кривых. Эти кривые надо было присоединить к прямой линии и окружности, чтобы в их взаимном пересечении было найдено решение поставленных задач. Вот некоторые из таких кривых.

Кривые

Представим себе равномерно вращающийся патефонный диск, по радиусу которого равномерно ползет муха, причем движение свое она начинает с центра диска. Какую кривую будет описывать муха?

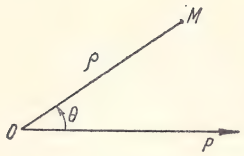


Рис. 5

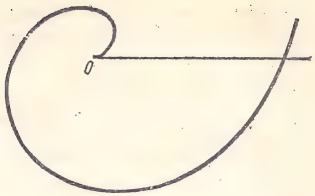


Рис. 6

Дадим название для такой кривой —*спираль Архимеда*. Для того, кто знаком с методом координат, не составит труда написать уравнение спирали. С этой целью воспользуемся полярной системой координат, которая строится так. На плоскости берется произвольная направленная полупрямая p (полярная ось). Тогда, если M — произвольная точка плоскости, то сопоставим с нею два числа — отрезок $OM = \rho \geqslant 0$, называемый полярным радиусом-вектором, и угол θ, называемый полярным углом и отсчитываемый против движения часовой стрелки от полярной оси до полярного радиуса-вектора. Числа ρ, θ называются полярными координатами точки M, а соответствие между точками плоскости и их полярными координатами — полярной системой координат (рис. 5). Точка O называется полюсом системы.

Примем то положение вращающегося радиуса, которое соответствует пребыванию мухи в центре диска, за полярную ось, тогда центр диска совпадает с полюсом, а расстояние, которое муха проползает по радиусу (полярный радиус-вектор ρ), будет пропорционально углу, на который повернется этот радиус (полярный угол θ). Следовательно,

$$\rho = a\theta, \qquad (1)$$

где a — множитель пропорциональности. Спираль имеет вид, представленный на рис. 6.

С помощью спирали Архимеда может быть легко решена задача о трисекции угла. В самом деле, как показывает уравнение (1), разделить на три равные части угол — это значит разделить на столько же частей соответствующий этому углу полярный радиус-вектор. Решение представлено на рис. 7. На нем изображен подлежащий делению на равные части угол AOB. Примем вершину угла O за полюс, сторону OA — за полярную ось полярной системы координат. Построим спираль

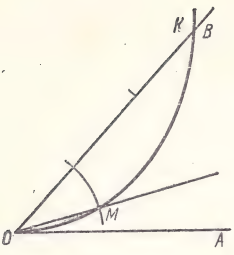


Рис. 7

Архимеда, имеющую уравнение (1), при каком угодно множителе пропорциональности a. Пусть она пересечет сторону OB угла в точке K. С помощью циркуля и линейки делим отрезок OK на три равные части. Третьей частью указанного отрезка проводим дугу окружности с центром O и делаем засечку на спирали (точка M). Проводим прямую OM. Угол AOM — третья часть угла AOB.

Очевидно, спираль Архимеда позволяет разделить произвольный угол не только на три, но и на произвольное число равных частей. При этом, разумеется, к инструменту, вычерчивающему спираль, должны быть присоединены циркуль и линейка.

Была ли спираль Архимеда открыта именно при решении задачи о трисекции угла, не известно. Но, учитывая ее связь с задачей, связь, которая основывается на прямой пропорциональной зависимости между линейными и угловыми величинами, можно говорить почти с полной уверенностью о том, что мысль о спирали возникла именно в связи с задачей о трисекции.

Задача о трисекции угла может быть решена еще и так. Пусть AOB — произвольный угол (рис. 8). На его стороне OB возьмем произвольную точку P, через которую проведем прямую PQ, параллельную второй стороне угла OA, и прямую PD, перпендикулярную к этой стороне. Через вершину O проведем прямую так, чтобы отрезок LM (L — точка пересечения этой прямой с PD, M — точка ее пересечения с PQ) был равен $2OP$. Угол AOM есть третья часть угла AOB. В самом деле, пусть N — середина отрезка LM, NT — перпендикуляр к PQ, тогда $OP = PN = NM$. Если обозначить угол AOM через α, то и $\angle PMO = \angle MPN = \alpha$. Угол ONP равнобедренного треугольника OPN является внешним углом треугольника PNM, следовательно, равен 2α. Утверждение доказано.

Провести с помощью циркуля и линейки через точку O прямую так, чтобы отрезок LM оказался равным удвоенному отрезку OP, невозможно. Это можно сделать с помощью вставки, предложенной Архимедом. Именно на полоске бумаги (во времена Архимеда это могла

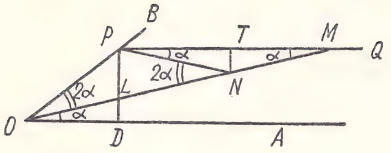


Рис. 8

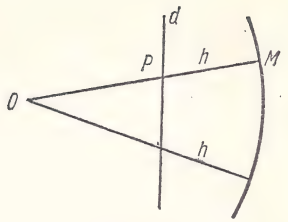


Рис. 9

быть полоска папируса) наносятся точки L, M так, чтобы отрезок LM равнялся удвоенному отрезку OP. После этого полоска передвигается так, чтобы она все время проходила через точку O (вершину угла), а точка L перемещалась по прямой DP. Тогда в тот момент, когда точка M окажется на прямой PQ, полоска отделит от данного угла его третью часть.

Вместо полоски с двумя нанесенными на ней точками можно воспользоваться кривой, которая названа именем Никомеда, греческого математика, жившего во II ст. до н. э. Это — *конхоида Никомеда*. Строится она так (рис. 9). Берется произвольная точка O — полюс конхоиды, прямая d, не проходящая через полюс — база конхоиды, и отрезок длины h — интервал конхоиды. Через полюс O проводятся всевозможные прямые и от точек их пересечения с базой откладывается отрезок PM, равный интервалу. Множество точек M и есть конхоида.

Вернемся снова к рис. 8. Если взять конхоиду с полюсом O, базой PD и интервалом, равным удвоенному отрезку OP, то она пересечет прямую PQ в точке M. Прямая OM отсекает от угла AOB третью часть.

Два Архимеда

От великого до смешного — один шаг. Эти слова приписывают Наполеону. Примеров тому в истории не счесть. Один из них связан с именем Архимеда, о котором мы только что упоминали. Творения Архимеда — вершина, которой достигли точные науки в древности. Он велик и в области математики, и в области механики. И, как и многие другие выдающиеся ученые, он в своей поразительной рассеянности мог соединять истинно великие открытия человеческого гения со смешными, забавными выходками, вызывавшими смех всех, кто его окружал.

Занятый своими научными размышлениями, он забывался до того, что совершенно терял представление о том, где он находится, забывал о еде, о сне, об отдыхе. В купальне он мог подолгу в задумчивости пальцем наносить всевозможные чертежи на свою кожу, густо намазанную смегмой (так называли доставаемый со дна болот ил, который заменял древним грекам мыло). Его нужно было насильно отрывать от этого занятия.

Предание донесло до нас курьезный эпизод из жизни Архимеда, связанный с открытием закона о погружении тел в жидкость. Согласно этому преданию, открыв свой знаменитый закон, ученый забылся до того, что выскочил в волнении из ванны, в которой мылся, и, совершенно не обращая внимания на свой непривлекательный вид, бросился через весь город к царю Гиерону, чтобы сообщить ему о своем открытии.

Этому вполне можно поверить. Говорят, что гений — это высшая степень сосредоточенности. Может быть, таким гением был и маршаковский человек рассеянный, который вместо шапки на ходу мог надеть сковороду, а вместо валенок перчатки натянуть себе на пятки.

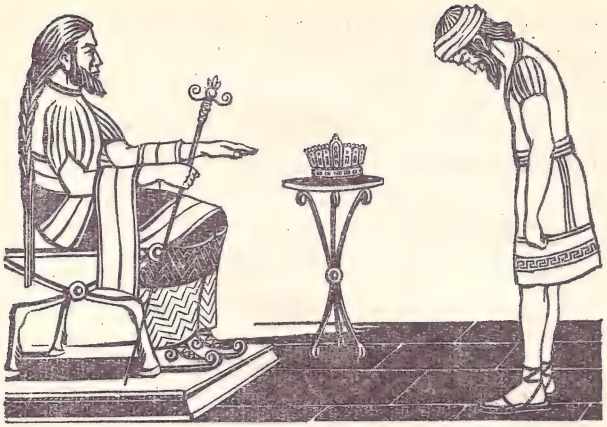
Как Архимед пришел к своему закону? Кто его подтолкнул к этому? Как бежал он по улицам своих родных Сиракуз? Об этом мы хотим рассказать в следующей юмористической поэме.

Н. И. КОВАНЦОВ

Поэма
о скупом царе Гиероне,
хитром ювелире,
мудром Архимеде,
его сварливой жене
и о законе погружения
тел в жидкость

Преданье старинное знает весь свет,
Как, тешась горячею ванной,
Открыл свой великий вакон Архимед,
Связав его с выходкой странной...

К царю Гиерону в роскошный дворец
Был зван ювелир хитроватый.
Сверкающий золотом царский венец
Покоился в зале богатой.



«Смотри,— ювелиру сказал Гиерон,
— Вот — тирская чудо-корона.
Создай, коль ты ловок и коль ты смышлен,
Такую же для Гиерона.

Я дам серебра тебе, золота дам,
Отмеряешь сам, сколько надо,
И, коль не уступишь чужим мастерам,
— Тебя ожидает награда».

Все сделалось так, как властитель изрек.
Отмерялось то, что просили,
И точно в назначенный ранее срок
Венец Гиерону вручили.

Доволен короной был царь Гиерон,
Подобной короне из Тира.
И, помня свое обещание, он
Велел наградить ювелира...

Но дни не прошли еще громких похвал,
Где каждый венцом восхищался,
Как червь подозренья свой голос подал
И в царскую душу закрался.

«Уж точно ли честен и праведен был
Тот мастер с ухваткою вора?
И все ли то золото, что получил,
Использовал по договору?»

Сомнения червь Гиерона грызет,
Минут не давая покоя.
Царь ночью не спит, царь не ест и не пьет,
Истерзанный мукой лихою.

Богат баснословно был царь Гиерон,
Но столь же был скуп от рожденья.
Догадкой жестокой на смерть поражен,
Не ведает царь облегченья.

Вконец обессилев, тиран приказал
Позвать во дворец Архимеда
И в слезных мученьях ему передал
Весь ужас кошмарного бреда.

Душа страстотерпца покой обрела,
Утишился многострадальный...
Но сам Архимед, позабыв все дела,
Забредил короной фатальной.

Идет ли в смятеньи, лежит ли мудрец,
У моря песчинки считает,
Сверкающий золотом царский венец
Его без пощады терзает.

«Терзает! О боги! Как точно узнать,
Что скрыто в том мастерском сплаве,
Какой ни разрушить, какой ни разъять
По воле царя я не в праве?

Корона такою остаться должна,
Какою создал ее мастер.
Ее, хоть задача и адски трудна,
Нельзя даже резать на части».

Великий мудрец перепробовал все
Возможности мысли случайной...
Венец, в колдовской оставаясь красе,
Дразнил неразгаданной тайной.

Забыл Архимед про питье и еду,
Забыл про массаж и купанья.
Но нет просветления в тяжком бреду,
Все нет, все напрасны старанья.

Недели прошли, и женой, наконец,
Был бит тугодум молчаливый
И в баню давно уж не мытый мудрец
Был прогнан Ксантиппой сварливой ...

Пред волею женской бессильны порой
И царь, и мудрец, и невежда,
Пред нею безмолствуют бог и герой
И робкая никнет надежда.

Вот в ванне, гордыню свою усмирив,
Лежит Архимед отрешенный,
И, взор в потолок над собой устремив,
Все тянет вопрос нерешенный.

Все тянет, грызет, все мусолит, жует,
Ворочает камень холодный.
В глубоком раздумье часы напролет
Рекой протекают бесплодной.

Но чары волшебные мягкой воды,
Но запах болотистый смегмы,
Что бурою пеной течет с бороды,
Так тешат ленивую флегму.

«Венец?.. Гиерон?.. Ювелир?.. Серебро?..
Смешать все?... Развеять по свету?..
Цари и короны?.. И зло, и добро...
Все канет в бездонную лету...

Вот счастье великое — мирно лежать
На бархатном мраморе ванны!
Вот неги блаженство — часы пребывать
В бездумье индийской нирваны!

В воде так легки, так воздушны тела...
В воде так легки... Стой, мгновенье!
Легки почему? Потому что дала
Вода тем телам облегченье?!

Вода!!! И, наверно, любая среда
Способна, по воле Зевеса,
В нее погруженное тело всегда
Лишать того самого веса,

Какой был в объеме ее до того,
Как тело туда погрузили!
Но это же значит, что если б в него
Корону царя поместили,

То, взвесив ее и объем подсчитав,
Узнали б без лишнего спору,
Такого ли качества был ее сплав,
Как должно быть по договору!..»

Сияющий, выскочил вон Архимед
Из ванны горячей, где мылся,
И прямо из бани, как был, не одет,
Бежать к Гиерону пустился...

Картина, достойная кисти богов,
— По улице, солнцем нагретой,
Пунктир оставляя из мокрых следов,
Бежит Архимед неодетый.

Толпа сиракузцев несется вослед,
В восторге от бешеной гонки,
И громко ликует, когда Архимед
Выкрикивал «Эврика!» звонко.

Нашел, он нашел тот желанный ответ,
Который искал так упорно!
«Нашел!!!» — в упоенье кричал Архимед,
«Нашел!!!» — повторяли задорно.

Закончился бег перед царским дворцом.
Царя в тот же миг отыскали,
Корону в сосуд погрузили, потом
И вес и объем подсчитали...

Плутом оказался лукавый хитрец.
По весу — все сделано строго,
Но был по объему тот царский венец
Нормального больше намного.

Часть золота взятого плут утаил,
Обличьем прикрывшись смиренным,
А в царской короне его заменил
Своим серебром малоценным.

Жестокая кара обманщика ждет.
Царь ходит в глубоком молчанье.
Как прежде, не ест он, не спит и не пьет,
Лихого ища наказанья.

«Повесить его!? Или медленно сжечь?
В зловонную ль бросить клоаку!?
Плетьми ли на площади вора засечь?
Отдать на съеденье собакам?..»

Свирепые муки терзают царя,
Лишая и сна, и обеда.
Вконец, кровожадным безумьем горя,
Он снова зовет Архимеда.

И снова, лишь царь мудрецу передал
Все страсти свои и мученья,
Как с плеч его камень тяжелый упал,
Вздохнул Гиерон с облегченьем.

Но вновь Архимед ходит, словно больной,
Задачею связан печальной.
И вновь, как и прежде, сварливой женой
С позором был прогнан в купальню.

Всё в той же глубокой он ванне лежит,
Глядя в потолок над собою...
Вода еле слышно и мягко журчит,
Баюкая мирным покоем...

«Казнить ювелира? Да точно ли он
Достоин той казни ужасной?
По совести, должен простить Гиерон
Проступок, не столь уж опасный.

Хотя вороватый, но мастер создал
Творенье большого искусства.
Сам тонкий художник, он в нем показал
Великой гармонии чувство.

К тому же, не будь ювелир вороват,
Не вызови он подозренья
Царя Гиерона, что, хоть и богат,
Болезненно скуп от рожденья,

Никто б заниматься короной не стал,
А став, не имел бы тот счастья,
Кто собственной шкурою не испытал
Сварливой супруги всевластье.

И плут, и жена, я и царь Гиерон
— Лишь цепи невидимой звенья!
Все в мире связует единый закон
В логические отношенья!!!»

И вновь Архимед в упоенье бежит
По камням босыми ногами.
И громкое «Эврика!» снова звучит
Под ласковыми небесами...

Это — Архимед забавный, милый, гениальный чудак. Говорят, что чудаки украшают жизнь. Древний мир выглядел бы, наверно, более серым и более унылым, если бы не было в нем озорного, искрометного чудачества.

Но был другой Архимед. Когда для его родных Сиракуз настали тяжелые, трагические времена, когда жестокий и беспощадный враг рвался к их стенам, чтобы овладеть ими и разграбить, Архимед встал во весь свой исполинский, всесокрушающий рост. Он один, своим гением, своей не знающей сравнений изобретательностью заменил по сути целый гарнизон солдат и в течение долгих месяцев удерживал город. Шли корабли с моря на приступ — он сжигал их системой параболических зеркал. Приближались они к оборонительным башням,— он вздергивал их за нос большими крючьями и топил в море. Шли на приступ вражеские солдаты — на них обрушивался неслыханный камнепад, устроенный опытной рукой с помощью невиданных доселе баллист.

Наверно, лишь потому, что Архимед был уже глубоким стариком (ему было в то время семьдесят пять лет), осада Сиракуз в конце концов закончилась их взятием. Во время чудовищной резни, которую устроили римляне в поверженном городе, погиб и престарелый ученый.

Как это было? Возможно, вот так.

Последние мгновения

... Чертежи, чертежи, чертежи. Они повсюду: на пыльном мраморном столе, нацарапанные острой щепкой, на стенах, выполненные куском угля, на полу, начерченные мелом. Одетый в потертый белый хитон, Архимед присел к

столу и задумался. Пальцы рук мелко дрожали, как в лихорадке. Крупный пот, смешанный с пылью, падал со смертельно усталого лица на руки, на одежду, на свитки папируса, разбросанные на столе.

Нет, он не бежал, как последний трус, с поля боя. Все, что было в его силах, весь свой ум, все порывы своей души он отдал городу. В долгие бессонные ночи, в дни, напоенные изнурительной жарой, он один был мозгом и сердцем всей обороны Сиракуз. При одном упоминании его имени римляне в страхе отбегали от городских стен, опасаясь сокрушительного камнепада, низвергающегося потока горящей просмоленной пакли, града дротиков и длинных копий. Не он ли, не сходя с места, сжег римский флот, приблизившийся к морским оборонительным укреплениям города? Не он ли один изобретенной им системой полиспастов вздергивал в воздух римские галеры и с высоты кидал их в морскую пучину? Но есть предел и человеческому гению, и человеческим силам. Он уже дряхлый старик, ему не удержать в руке боевого меча. Он держался, держался до тех пор, пока враг находился за стенами города. Но вот уже легионеры с крылатыми шлемами замелькали на источенных временем камнях мостовой. Греки сопротивляются из последних сил. В рукопашном бою для Архимеда нет места...

Мягкая прохлада ласково обволакивала разгоряченное полуденным зноем тело. Шум битвы глухо доносился сквозь плотную портьеру, закрывавшую вход. Соломенные шторы, висевшие на обоих окнах, создавали полумрак, нисколько не мешавший видеть предметы привыкшим к нему глазам.

Жизнь подходила к концу, жизнь долгая, жизнь тяжелая. За семьдесят пять лет, отпущенных ему роком, он в вечных поисках, в постоянном напряжении, в разъездах, в непрерывающихся спорах в мастерской, на верфях, в каменоломнях ни разу не имел возможности оглянуться на нее, подумать, правильно ли жил, получил ли от нее хоть часть тех наслаждений, о которых так самозабвенно говорил этот вдохновенный старец Эпикур. Семнадцатилетним юношей стоял он над гробом великого мыслителя, думая собственной жизнью воплотить его жизнерадостную философию. Воплотил ли?

Еще в юные годы вступил он на эту тернистую, извилистую, полную бесчисленных подъемов и бесчислен-

ных спусков стезю ученого. Жизнь ученого... Как плохо он представлял себе ее в начале своего жизненного пути. Он рисовал ее в своих юношеских честолюбивых мечтаниях наполненной сладостной негой, всеобщим поклонением и прочной, постоянной, ничем не омрачаемой славой. Нет, она оказалась куда суровее и жестче. На себе самом он испытал, что эта жизнь — вечное, ни на день, ни на час не прекращающееся служение единому богу, единому кумиру, единому властителю всех помыслов и всех желаний. Наука — это гипнотизер, стоит лишь раз подпасть под волшебное очарование ее истин, как все оказывается забытым ради нее одной, до последнего вздоха, до могильного склепа.

Слава есть, но слава, вдоволь отравленная улюлюканьем невежд и завистников. Есть восторженные поклонники, их много, но много и злобных хулителей, не упускающих случая открыто, тайно, через подставных лиц уколоть, оболгать, оклеветать, сделать посмешищем...

Такой была его собственная жизнь, такой была и жизнь его отца. Отца звали Фидием. Услужливая память нарисовала картину бесконечно далекого детства, когда юному Архимеду приходилось чуть ли не каждого нового знакомого убеждать в том, что его отец лишь однофамилец знаменитого создателя Зевса Олимпийского и девы Афины, что скульптор Фидий жил за сто с лишним лет до Фидия — его отца, астронома. Удивлялись тому, что Фидии — и вдруг не родственники, и что, наоборот, Архимед совершенно неожиданно оказывается родственником царя Гиерона, а следовательно, и его сына Гелона...

А вот пышная Александрия. Архимед часами ходил по каменным плитам ее улиц, взбирался на Форосский маяк, смотрел оттуда на гавань, сплошь запруженную греческими, римскими, финикийскими, персидскими и другими кораблями, приплывшими сюда, казалось, со всей Ойкумены. Но гораздо больше времени проводил он в библиотеке, той знаменитой александрийской библиотеке, собранию рукописей которой могло бы позавидовать любое книгохранилище мира. В библиотеке собиралась вся «золотая» молодежь города великого Александра. В страстных спорах с молодыми людьми, почитателями своего знаменитого согражданина Евклида, постепенно вызревало понимание Архимедом свое-

го места в науке, того, что сближало его с александрийцами, и того, что отличало его от них. Но, несмотря на несходство во взглядах, благоговейное уважение к памяти великого Евклида безраздельно овладело и самим Архимедом, как только он познакомился с творениями ученого. «Начала» Евклида стали тогда настольной книгой на всю его долгую жизнь...

Шум битвы все нарастал. Плотная штора уже не могла заглушить ликующих возгласов победоносных латинян, звенящих ударов мечей по щитам последних защитников Сиракуз и глухих — по их измученным и истерзанным долгой обороной телам. Торжествующий враг уже овладел городом-страдальцем и предался гнусному, омерзительному грабежу, не щадя ни детей, ни женщин, ни стариков.

Как странно, что все это — и удары мечей, и стоны умирающих, и победные крики римлян — кажется таким далеким по сравнению с тем, что было так давно — более полувека назад. Архимед вдруг с жуткой отчетливостью вспомнил свой долгий и очень опасный переезд на небольшой галере из Александрии в Сиракузы. Неспокойное море с глухой угрозой бросало и бросало на беззащитное, утлое суденышко зеленые валы, увенчанные гривой кипящей беломраморной пены, и несчастным аргонавтам казалось, что вырвать их из смертельных объятий Посейдона уже не может ни человеческая, ни сверхчеловеческая сила. Но вот кормчий вновь всей тяжестью своего тела наваливался на тяжелое рулевое весло, высоко поднимал его конец вверх и с силой обрушивал на рокочущую зыбкую громаду. Содрогнувшись, как взнузданный конь, галера на миг застывала на гребне высокой волны и затем плавно скатывалась в очередную бездонную пропасть...

Выйдя из Александрии нарядной, украшенной разноцветными парусами красавицей, галера прибыла в Сиракузы разбитой, дырявой, лишенной мачт и ветрил оборванной нищенкой...

Свирепое лицо римского легионера вдруг явилось на фоне пестрой толпы сиракузцев, вышедших встречать несчастный корабль с полумертвыми мореплавателями. Откуда и как он возник, этот незваный чужестранец? Бред ли он больного воображения или кошмар, явившийся во плоти? Он оскаливает свой рот, на шее у него вздуваются вены, он что-то кричит, но Архимед не слы-

шит его слов. Прошлое все еще властно держит его в своих руках, колдовские чары забвения все еще не развеяны...

Призрак не исчезал. Он все увеличивался и увеличивался в помутненных глазах математика, пока, наконец, не заполнил собой всей комнаты, вытеснив из нее всю без остатка солнечную гавань старых Сиракуз. Ах, вот это, оказывается, кто. Грабитель и убийца добрался и до его жилища. Свирепый латинянин — в таком виде явилась к нему смерть, о которой он почти не думал прежде.

— Не трогай моих чертежей! — тихо, но твердо и повелительно произнес старик. Это были его последние слова. Широкий обоюдоострый меч с силой обрушился на седую и изможденную, но гордую и вдохновенную голову великого гражданина Вселенной...

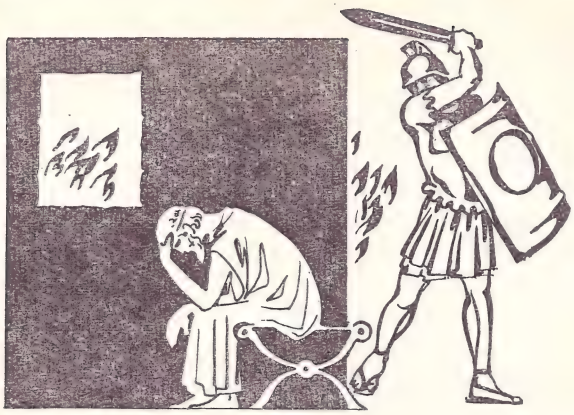
Говорят, что так погиб Архимед в своем доме на одной из улиц взятых с бою и разграбленных римлянами Сиракуз. Римский полководец Марцелл, даже он, непримиримый и коварный враг, долго и безуспешно пытавшийся овладеть городом, был сильно опечален, узнав о смерти одного из величайших ученых и одного из самых горячих и неустрашимых патриотов.

Триада

Гиппократ Хиосский, с которым мы познакомились на предыдущих страницах, занимался не только луночками, образованными дугами окружностей, с его именем связана также одна из попыток решения упомянутой выше задачи об удвоении куба. Как известно, эта задача состоит в требовании построить с помощью циркуля и линейки ребро куба, объем которого в два раза больше объема данного куба. Если a — ребро данного куба, x — ребро искомого, то, в соответствии с задачей, мы должны иметь

$$x^3 = 2a^3. \qquad (2)$$

Гиппократ задачи не решил. Ни с помощью циркуля и линейки, ни с помощью иных инструментов. Но он показал, что эта задача может быть сведена к задаче о нахождении двух средних пропорциональных между двумя заданными величинами, из которых первая равна ребру данного куба, другая — вдвое больше ее. Тогда ребро искомого куба будет первой средней пропорциональной. Действительно, если воспользоваться современ-



ными обозначениями, то мы будем иметь

$$a : x = x : y = y : 2a.$$

Из этих двух пропорций получаем

$$x^2 = ay, \quad y^2 = 2ax. \tag{3}$$

Исключив из последних равенств y, после сокращения получающегося при этом соотношения на x, придем к равенству (2).

Впереди у нас большой разговор о творце аналитической геометрии Рене Декарте. Мы будем говорить о методе координат и об уравнениях кривых в той или иной системе координат, как мы уже говорили об уравнении спирали Архимеда в полярной системе. Сейчас же отметим лишь, что каждое из уравнений (3) представляет собой в прямоугольной декартовой системе уравнение параболы. Ось первой параболы совпадает с осью ординат, ось второй — с осью абсцисс (рис. 10).

Ребро искомого куба представляет собой абсциссу точки пересечения этих двух парабол. Таким образом, задача об удвоении куба может быть решена с помощью циркуля, линейки и прибора, вычерчивающего параболы.

Сам Гиппократ, вероятно, представления о параболе не имел. Не имел он, разумеется, никакого представления и об уравнении кривой, поскольку метод координат грекам известен не был. На геометрические свойства кривых, описываемых уравнениями (3), впервые обратил внимание греческий математик Менехм, который жил в

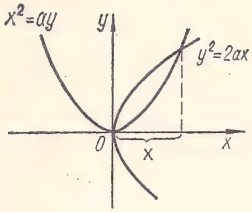


Рис. 10

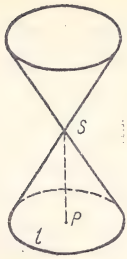


Рис. 11

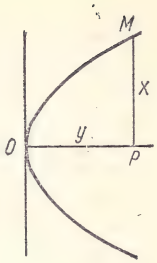


Рис. 12

IV ст. до н. э. Был он учеником одного из самых выдающихся (недаром его называли богоравным) ученых этого времени Евдокса Книдского. Менехм открыл не только параболы, т. е. кривые, которые задаются уравнениями (3), но одновременно эллипсы и гиперболы. Эти кривые — эллипс, гипербола, парабола — с того времени всегда рассматриваются вместе и за этой тройкой твердо укрепилось название *триады Менехма*.

Полагают, что Менехм открыл триаду, рассматривая сечения прямого кругового конуса плоскостями. При этом конус следует рассматривать состоящим из двух полостей (рис. 11). Такой конус получается следующим образом. Пусть l — окружность с центром P, лежащая в некоторой плоскости π. Проведем через P прямую, перпендикулярную к плоскости π, и на ней выберем некоторую точку S. Проведем через S всевозможные прямые, пересекающие окружность l. Поверхность, ими образованная, и есть прямой круговой конус. Части его, расположенные по разные стороны от точки S (вершины конуса), вернее, по разные стороны от любой плоскости,

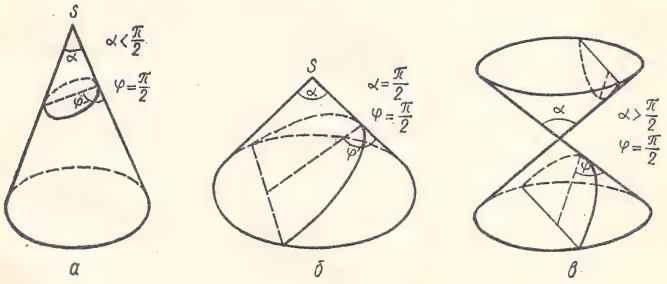


Рис. 13

проходящей через вершину и не содержащей образующих конус прямых, являются его полостями.

Не исключено, что Менехм пришел к коническим сечениям как раз через задачу об удвоении куба. Великими задачами занимались в древности многие. Эти задачи часто сводились к другим, решение которых надеялись получить проще. Так это было и с рассматриваемой сейчас задачей об удвоении куба и двумя средними пропорциональными Гиппократа.

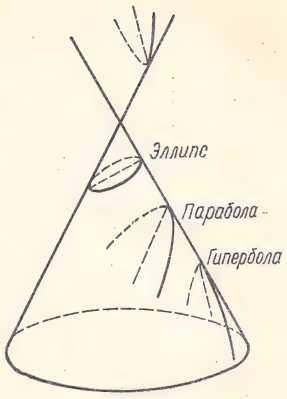


Рис. 14

Разумеется, представления об уравнениях кривых греки не имели. Однако те свойства кривых, которые мы записываем с помощью уравнений, греки выражать умели. Делалось это с помощью так называемой риторической алгебры. Так, кривая, заданная с помощью первого уравнения (3), характеризуется свойством, которое греками формулировалось бы так: если из любой точки кривой опустить перпендикуляр на ее ось, то площадь квадрата, построенного на этом перпендикуляре, равна площади прямоугольника, одна сторона которого имеет постоянную длину a, а другая есть отрезок от вершины кривой до основания указанного перпендикуляра (рис. 12). Такое именно свойство мог обнаружить Менехм у одной из трех открытых им кривых.

Произведения Менехма до нас не дошли. То, что нам известно о его открытии, мы находим, со ссылкой на него, в трудах более поздних математиков. Но эти ссылки разноречивы. Некоторые авторы полагают, что греческий математик, открывший конические сечения, рассматривал лишь плоскости, ортогональные к одной из образующих конуса. Тогда при осевом угле конуса, меньшем прямого, в сечении получается эллипс (рис. 13, *а*), при угле, равном прямому, — парабола (рис. 13, *б*), при тупом угле — гипербола (рис. 13, *в*). Другие считают, что Менехму уже было известно то, что все три кривые получаются при пересечении плоскостями одного и того же конуса. Тогда, если секущая плоскость не параллельна ни одной из образующих

конуса, в сечении получается эллипс. Если она параллельна одной образующей, то сечение — парабола, наконец, если она параллельна двум образующим, кривая есть гипербола (рис. 14). Некоторые авторы полагают, что одновременное рассмотрение всех трех кривых на одном и том же конусе есть дело более позднего времени, и связывается оно с именем выдающегося греческого математика Аполлония Пергского (II ст. до н. э.).

Конические сечения вокруг нас

Открытие конических сечений было поистине великим открытием. Уравнения этих кривых в прямоугольной декартовой системе координат есть уравнения второй степени, поэтому конические сечения называют еще кривыми второго порядка. Значения кривых второго порядка, вероятно, еще никто не сумел переоценить. Они — на каждом шагу нашей жизни. Примеры? Вот они. Наша Земля, например, в своем движении вокруг Солнца описывает эллипс. То же самое происходит и со всякой другой планетой Солнечной системы. Этот факт фиксируется первым законом Кеплера. (Разумеется, движение планет происходит по более сложным кривым, так как, кроме вращения вокруг Солнца, все планеты принимают еще участие в поступательном движении всей Солнечной системы. Однако, отвлекаясь от последнего движения, можно говорить о движении планет по эллипсам).

Движение по эллипсам происходит потому, что каждая планета в каждый момент имеет скорость, не превосходящую некоторой величины. Оказывается, что если бы эта скорость была большей, то движение происходило бы или по параболе, или по гиперболе. Тела́, движущиеся относительно неподвижного тела и притягивающиеся к нему по закону всемирного тяготения, никаких иных траекторий иметь не могут. Итак, кривые второго порядка лежат, по сути, в основе нашего мироздания.

Далее, если, например, повернуть параболу вокруг ее оси, то получается поверхность, называемая параболоидом вращения. На оси такого параболоида есть точка — фокус, обладающая замечательным свойством: всякая проходящая через нее прямая, отразившись от внутренней поверхности параболоида, пойдет в направлении, параллельном его оси. Но это означает, что если изготовить прожектор в форме параболоида враще-

ния и поместить в фокусе электрическую лампочку, то все лучи после отражения от параболоида образуют параллельный пучок. Это представляет, очевидно, большое преимущество, так как именно такой пучок лучей мало рассеивается в пространстве даже на достаточно больших расстояниях от источника света. Фактически, конечно, идеального пучка параллельных лучей не получаем, так как лампочка — не точка, но и достигнутого приближения к такому пучку достаточно для практических целей.

В форме параболических зеркал изготовляются и рефлекторы телескопов. Их назначение противоположно назначению рефлекторов в прожекторе: в то время как в прожекторе рефлектор отбрасывает в пространство световые лучи, в телескопе он собирает лучи, идущие из космоса, в своем фокусе. Достаточно теперь направить на этот фокус систему увеличительных стекол, и мы получим о светиле, лучи от которого собрали, гораздо большую информацию, чем ее может дать невооруженный глаз.

Мнимой осью гиперболы называется та ее ось симметрии, которую гипербола не пересекает. Если повернуть гиперболу вокруг такой оси, то поверхность, которая при этом образуется (она называется однополостным гиперболоидом вращения), тоже имеет множество практических применений. Гиперболоид представляет собой линейчатую поверхность. На нем располагаются два семейства прямолинейных образующих. Образующие одного семейства (как того, так и другого) друг друга не пересекают, образующие разных семейств пересекаются всегда. Именно это свойство и находит применение в технике. Если, например, изготовить башню из прямолинейных стержней, поставив их вертикально, то получится очень непрочное сооружение — оно прогнется от сравнительно небольшой нагрузки. Если же стержни расположить так, чтобы они образовали однополостный гиперболоид (причем именно два его семейства), и связать в точках их пересечения, то получится очень легкая и очень прочная конструкция. В форме таких поставленных друг на друга гиперболоидов изготовляются башни, получившие название башен системы инженера Шухова (по имени выдающегося русского инженера академика В. Г. Шухова).

Спиралями, конхоидами и коническими сечениями далеко не исчерпываются все те замечательные кривые,

которые были открыты в попытках решения знаменитых задач древности. Однако сколько бы ни было найдено замечательных кривых, великих задач древности они не решают. Ведь, как мы помним, надо было не просто их решить, а решить, не прибегая ни к каким иным линиям, кроме прямой и окружности. А как ответить на вопрос, можно или нельзя ту или иную задачу решить с помощью только этих линий?

Дать положительный ответ на этот вопрос, если он существует, в принципе оказывается проще, чем дать отрицательный — надо просто попытаться его найти, после более или менее продолжительных поисков такое решение обычно находится.

Гораздо хуже обстоит дело в том случае, когда решения не существует. Здесь, оставаясь один на один с обычной геометрической интуицией, едва ли можно надеяться на получение требуемого ответа. В этом случае задачу можно подвергнуть скрупулезному алгебраическому анализу, чтобы невозможность ее решения оказалась сведенной к невозможности выполнения тех или иных алгебраических равенств.

Итак, за помощью к алгебре!

Алгебра приходит на помощь к геометрии

Мысль о том, чтобы заставить алгебру работать на геометрию, подготавливалась столетиями. Сначала эта мысль робко реализовала себя у греков в виде так называемой риторической алгебры. Алгебраических символов, кроме простейших, не было, и потому то, что мы сейчас получаем довольно просто, выполняя над уравнениями геометрических образов определенные алгебраические операции, древние математики вынуждены были находить с помощью чрезвычайно неудобных громоздких, лишенных всякой наглядности словесных выражений. Это до некоторой степени тормозило дальнейшее развитие алгебры.

Символику ввел выдающийся французский математик Франсуа Виет лишь в XVI ст. Однако по нашим нынешним нормам она была чрезвычайно несуразной. Пользы такая символика принесла мало. Но и с ее помощью соотечественник Виета Пьер Ферма сделал попытку соединить алгебру с геометрией в то единое целое, которое мы называем сейчас аналитической геометрией. Ферма считается одним из творцов этой науки. Однако

неизящная, неудобная, плохо приспособленная к нуждам как алгебры, так и геометрии виетовская символика отпугнула математиков и от аналитической геометрии Ферма. Ферма — творец этой геометрии, но о нем вспоминают в этой связи лишь в историко-математических работах, истинным же ее творцом, остроумным, удачливым, все единодушно называют его современника и соотечественника Рене Декарта. Декарт переделал символику Виета. У Виета была тяжеловесная латынь, у Декарта — легкий разговорный французский язык. У Виета — ненужные усложнения и условия, Декарт же отбрасывает их, идя к цели прямо и просто.

Кто же он, этот человек, которому благодарные потомки отвели в Пантеоне одно из самых почетных мест?

Счастливая судьба солдата

...1618 год. Холодный ноябрьский ветер метет вылизанные до блеска улицы маленького голландского городка Бреда. Прохожих совсем немного. Молодой солдат в форме армии штатгальтера Морица Оранского со скучающим видом фланирует по плитам мостовой. Опытному глазу сразу видно, что единственная цель солдата — найти какое-нибудь развлечение.

Но вот он замечает, что около одной из деревянных тумб с наклеенными на ней объявлениями толпится группа оживленно жестикулирующих людей. Солдат прислушивается к разговорам, на лице его изображается досада — говорят на голландском языке, которого он, очевидно, не понимает. Ему, однако, ясно, что предмет разговора — большой лист бумаги, неплотно приклеенный к тумбе и колышащийся под порывами осеннего ветра.

«Что написано на этом плакате?» — обращается он к присутствующим по-французски.

Его не понимают. Однако нет. Один из тех, к кому обращен вопрос, смотрит на француза с интересом. «Месье солдату надо перевести текст объявления?» — обращается он к любопытствующему иностранцу. Он переведет, но при одном условии — солдат принесет ему решения всех тех задач, которые приведены на этом плакате.

Доброжелательный голландец представляется — преподаватель физики, медицины и математики Бекман, а на плакате, прикрепленном к тумбе, объявление о конкур-

се на решение математических задач. Объявлена и награда, правда, больше символическая, чем реальная. Но гораздо большей наградой будет то, что решивший получит титул лучшего математика города.

На следующее утро молодой француз робко постучался в дверь квартиры Бекмана. Задачи были решены, все до одной. Удивлению профессора нет границ. Дверь гостеприимно распахивается, иностранец — желанный гость в доме. Сбегается вся семья взглянуть на это чудо.

Еще ни разу не случалось, чтобы кто-нибудь прежде вот так просто, в один присест решил задачи, над которыми месяцами ломали головы и общепризнанные авторитеты. И ведь подумать только — Бекман вначале принял его за этакого гуляку!

Вскоре узнают, что молодого француза зовут Декартом, родом он из Турени, а воспитывался в иезуитской коллегии Ла Флеш, там же изучал и математику.

Унылое течение гарнизонной жизни было нарушено. Декарт стал частым гостем в квартире Бекмана. Долгие часы проходили в захватывающих беседах о математике, в решении модных в то время задач, в разговорах о сущности и назначении математики.

Еще в коллегии его, тогда совсем еще юного искателя истины, поразило крайнее несоответствие между прочностью фундамента, на котором покоилось здание математики, и хилостью самого здания. Должна же существовать какая-то более солидная конструкция, достойная

подведенной под нее базы. Но как найти эту конструкцию?

«Я с детства,— писал Декарт впоследствии,— воспитывался для науки, и так как меня уверили, что она дает ясное и верное познание всего, чем жизнь красна, то я прилагал необыкновенную ревностность к ее изучению. Но когда я кончил весь курс, целью которого обыкновенно считают зачисление в ученые, мои взгляды совершенно изменились. Я очутился в такой сумятице сомнений и ошибок, что из моей жажды учения вынес только одну пользу — умение раскрывать все более и более глубину моего невежества, а между тем я был учеником знаменитейшей школы Европы и полагаю, что если есть на земле где-нибудь ученые люди, то именно там должны быть таковые.

Я выучился всему, чему учились другие, но, не удовлетворившись этим, я прочел все, какие только могли попасть мне в руки, книги о предметах, считавшихся самыми любопытными и научными».

Не удовлетворенный ни теологией, ни философией, Декарт обращается к математике и с огорчением убеждается, что и на этой гранитной основе творчества не выстроено ничего более возвышенного, чем приложение математики к практической механике.

Однако настойчивые размышления приносят свои плоды, постепенно начинают вырисовываться контуры строения, еще далекого от ожидаемого совершенства, но более или менее соответствующего замыслам. По словам ученого, в следующем, после описанных выше событий, году, когда он находился в швабском городе Ульме, он пережил три необычайных сна, которые явили ему новую «удивительную» науку.

Можно усмотреть в этом признании какое-то преувеличение, но совершенно бесспорно, что период высочайшего творческого напряжения, период близкого к экстазу вдохновения — это именно такой период, когда стираются грани между мечтой и действительностью, когда жизнь становится мечтой и мечта — жизнью.

Великое творение

В чем же заключается открытие Декарта? Мы называем его аналитической геометрией. Как и все гениальное, оно гениально просто. Энгельс назвал открытие аналитической геометрии (декартовой переменной величи-

ны) поворотным пунктом в математике. Он писал, что благодаря этому открытию в математику вошли диалектика и движение, а это немедленно повлекло за собой и развитие бесконечно малых. Обычно творцами исчисления бесконечно малых (дифференциального и интегрального исчисления) считают великого английского ученого Ньютона и великого немецкого философа Лейбница. Энгельс же подчеркивал, что началом следует считать открытие Декарта, а Ньютон и Лейбниц лишь в целом завершили, но не открыли это исчисление.

Основная мысль Декарта, как мы уже говорили, заключалась в том, чтобы заставить алгебру «работать» на геометрию. Алгебра имеет дело с числами, уравнениями, геометрия — с точками, линиями, поверхностями. Связать одно с другим — это значит найти способ как-то сопоставить геометрические образы с образами алгебры и затем, выполняя над последними те или иные формальные, осуществляемые по определенным законам действия, результаты этих действий истолковать геометрически.

Было бы очень затруднительно рассказывать о существе аналитической геометрии в терминах, которые были приняты во времена Декарта. Столь же затруднительно пользоваться и математическими обозначениями XVII ст. Как мы уже говорили, сам Декарт в значительной мере усовершенствовал символику. Многое из того, чем мы пользуемся сейчас, существовало и во времена Декарта, но многое было отличным от нашего. Расскажем о сущности открытия Декарта современным языком.

Для того, кто знаком с методом координат, факты, которые мы сообщим, не будут новыми. Однако мы настоятельно рекомендуем ему прочитать об этом еще раз — для полноты картины это было бы крайне желательно. О некоторых из таких фактов, не входя в подробности, мы уже говорили выше — вспомним уравнения парабол в прямоугольной декартовой системе координат, уравнение спирали Архимеда в полярной системе.

Основными понятиями в математике являются понятия числа и фигуры. Каждую фигуру можно охарактеризовать определенными параметрами — длиной, площадью, объемом. Однако они не дают возможности отличать одну фигуру от другой, если их параметры одинаковы. Надо уметь с помощью чисел определять также и положение фигуры в пространстве. Это де-

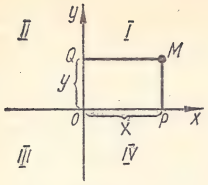


Рис. 15

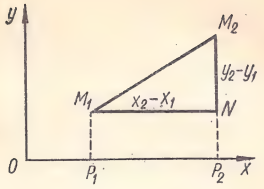


Рис. 16

лается в методе координат (в аналитической геометрии мы употребляем эти термины как идентичные). Овладеть методом координат — это значит слить в своем представлении в одно целое формальный аппарат алгебры с геометрической интуицией. Такое овладение достигается в результате длительных и строго целенаправленных упражнений.

Каждая геометрическая фигура представляет собой множество точек. Чтобы задать с помощью чисел положение фигуры в пространстве, следует уметь задавать с помощью чисел положение точки. В зависимости от того, где расположена точка — на линии, на поверхности или в трехмерном пространстве, следует взять и соответствующее количество чисел: одно — для точки на линии, два — для точки на поверхности, три — для точки в пространстве (более подробно об этом будет сказано несколько позднее). Тогда между точками, с одной стороны, и совокупностями чисел, с другой, установится некоторое взаимно однозначное соответствие. Это соответствие — основное в методе координат. Оно называется системой координат. В зависимости от того, где мы берем точку и как именно устанавливаем соответствие, мы будем иметь ту или иную систему координат. Начнем с наиболее простой — прямоугольной декартовой системы координат на плоскости.

Возьмем две взаимно перпендикулярные прямые Ox и Oy (рис. 15), которые назовем *осями координат*, соответственно осью абсцисс и осью ординат. Точку их пересечения O назовем началом координат. Если M — произвольная точка плоскости, то ее координатами x, y назовем соответствующие расстояния до осей координат. Координату x назовем *абсциссой*, координату y — *ординатой* точки M. Будем записывать это так: $M(x, y)$. Если точек несколько, будем у координат писать индексы: $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$,... В зависимости от того, где

находится точка, ее координаты будут иметь те или иные знаки. Так, на рис. 15 обе координаты положительны. Это случай расположения точки в первом квадранте. Квадрантом называют одну из четырех частей, которые получаются при разбиении плоскости осями координат. Если точка находится во втором квадранте, ее абсцисса отрицательна, а ордината положительна и т. д. Для точек, расположенных на оси абсцисс, ординаты равняются нулю, а для точек оси ординат нулевыми являются абсциссы. Обе координаты начала координат равняются нулю.

Каждая линия на плоскости — это множество (геометрическое место) точек. Любую линию, как и точку, можно было бы задать с помощью некоторой совокупности чисел — ее координат. Однако, принимая точку за основной геометрический образ и рассматривая линию как совокупность точек, мы сделаем иначе — сопоставим с каждой линией некоторое уравнение (уравнение этой линии). Если какая-то точка принадлежит линии, ее уравнение должно удовлетворяться координатами точки. Таким образом, уравнение линии — это условие, которому удовлетворяют координаты произвольной точки линии и не удовлетворяют координаты точек, которые линии не принадлежат.

Решим теперь несколько основных задач. Следует обратить внимание на то, что каждый раз мы будем решать задачу, имея конкретное расположение точек относительно осей координат. Однако мы всегда должны следить за тем, чтобы аналитические выражения, которые мы используем, от такого расположения не зависели. Тем самым и конечные формулы, и уравнения будут справедливы для любого расположения.

1. Расстояние двух точек.

Пусть имеем две какие-нибудь точки $M_1\ (x_1,\ y_1)$, $M_2\ (x_2,\ y_2)$ (рис. 16). Из рисунка легко видеть, что $M_1N = x_2 - x_1$, $NM_2 = y_2 - y_1$. Тогда по теореме Пифагора получаем искомую формулу:

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad (4)$$

Эта формула справедлива для любого расположения точек, а не только для того, которое у нас изображено на рисунке.

2. Уравнение окружности.

Пусть r — радиус круга, $C(a,\ b)$ — его центр, точка

$M(x, y)$ — произвольная точка окружности. Тогда по формуле (4), определяющей расстояние двух точек, получаем (после возведения в квадрат)

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2. \tag{5}$$

Это уравнение можно записать в виде

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0, \tag{6}$$

где

$$A=-2a, \quad B=-2b, \quad C=a^2+b^2-r^2.$$

3. Уравнение прямой.

Пусть l — произвольная прямая, образующая с осью абсцисс угол α и пересекающая ось ординат в точке, ордината которой равна b, $M(x, y)$ — произвольная точка прямой (рис. 17). В таком случае, как видно из рисунка, $NM=y-b$, $NB=x$, поэтому

$$y=kx+b, \tag{7}$$

где $k=\operatorname{tg}\alpha$. Это уравнение можно переписать так:

$$Ax+By+C=0. \tag{8}$$

Уравнение (8) может быть сведено к виду (7), если положить

$$k=-\frac{A}{B}, \quad b=-\frac{C}{B}, \quad (B\neq 0).$$

Всякое уравнение вида (8) есть уравнение прямой, всякое уравнение вида (6) есть уравнение окружности.

Решим теперь следующую задачу: найти геометрическое место (множество) точек, отношение расстояний которых от двух данных точек есть величина постоянная.

Когда мы говорим «найти», то это означает, что следует прежде всего выяснить, не находится ли упомянутое множество точек среди известных нам кривых. Пользуясь методом координат, нужно найти уравнение искомого множества и выяснить, не совпадает ли найденное уравнение с одним из известных нам. Если совпадение есть — задача решена. Однако если совпадения не будет, то это еще не означает, что среди известных кривых найденной кривой нет, надо еще проверить, нельзя ли свести найденное уравнение к одному из известных путем подходящего преобразования системы координат. Если сведение невозможно, то приходим к новому геометрическому месту точек.

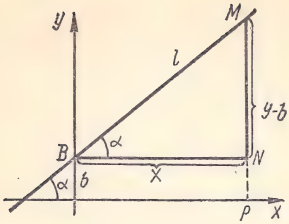


Рис. 17

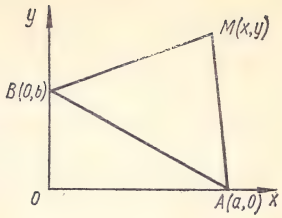


Рис. 18

Итак, возьмем на плоскости некоторую прямоугольную декартову систему координат. Не нарушая общности, будем считать заданные точки расположенными на осях координат. Тогда их координаты будут такими: $A(a, 0)$, $B(0, b)$ (рис. 18). Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка искомого геометрического места точек. Тогда, в соответствии с задачей,

$$\frac{AM}{BM} = \lambda, \tag{9}$$

где λ — величина данного отношения. По формуле (4) имеем:

$$AM = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}, \quad BM = \sqrt{x^2 + (y-b)^2}.$$

Если внести это в равенство (9), возвести обе части в квадрат и перенести все в левую часть, то получим

$$(1-\lambda^2)(x^2+y^2) - 2ax + 2\lambda^2 by + a^2 - \lambda^2 b^2 = 0. \tag{10}$$

Возможны два случая:

1) $\lambda = 1$. Уравнение (10) принимает вид

$$Ax + By + C = 0,$$

где $A = -2a$, $B = 2b$, $C = a^2 - b^2$. Но это есть уравнение (8), т. е. уравнение прямой. Этого и следовало ожидать, так как при $\lambda = 1$ искомое геометрическое место точек будет множеством точек, равноудаленных от точек A и B, а это есть, как известно, перпендикуляр к отрезку AB, проведенный через его середину. Таким образом, пользуясь методом координат, мы установили тот факт, что множество точек, равноудаленных от концов отрезка, есть прямая линия. Этот простой факт, разумеется, легко устанавливается и без метода координат. Есть, однако, множество других фактов, где метод координат оказывается незаменимым.

2) $\lambda \neq 1$. Уравнение (10) в этом случае может быть приведено к виду:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0,$$

где

$$A = -\frac{2a}{1-\lambda^2}, \quad B = \frac{2\lambda^2 b}{1-\lambda^2}, \quad C = \frac{a^2 - \lambda^2 b^2}{1-\lambda^2}.$$

Но это — уравнение (6), т. е. уравнение окружности. Таким образом, искомое геометрическое место точек является окружностью.

Окружность имеет множество определений. Определенная так, как это было только что сделано, она носит название *окружности Аполлония* (по имени одного из величайших геометров Древней Греции Аполлония Пергского, о котором говорили выше).

Подобным же образом решаются и другие задачи. Однако назначение аналитической геометрии не только в таком «узнавании» вида кривой по ее уравнению, т. е. сопоставлении каждого вновь получаемого уравнения с уравнениями, которые получены ранее. Имея уравнение, можно, если это позволяют наши методы, найти все объективно существующие геометрические свойства кривой. Зная эти свойства, мы сумеем найти и физическую природу этих свойств.

Мир в координатах

Заставив алгебру работать на геометрию (да и не только на геометрию, но и на физику, химию, биологию, географию и т. д.), Декарт, по сути, предвосхитил многие из тех идей, которые считаются достоянием более поздних времен. Так, например, изучая законы человеческого мышления, в частности законы арифметических операций, приходим к их определенным моделям и находим возможность заставить выполнять эти операции машину. Для машины совершенно безразлично, какого рода информацию в нее вводят, лишь бы эта информация обладала заданными формально-логическими свойствами, которые входят в ее компетенцию. Она переработает любую такую информацию по тем законам, которым ее «научили», и выдаст готовый результат, от человека же, введшего информацию, зависит, какое истолкование дать этому результату.

В рассматриваемом нами случае роль такой математической машины играет алгебра, для которой совершен-

но безразлично, какое конкретное значение имеют те или иные объекты — геометрическое, физическое или иное. Раз они обладают заданными свойствами, которые подпадают под компетенцию алгебры, они будут обработаны ею, как и все иные объекты, с теми же свойствами.

Математика, взятая в целом, — одна из форм познания реальной действительности. Характерными ее особенностями являются абстрактный характер ее истин (причем степень абстрактности здесь гораздо выше, чем в других науках), а также своеобразный пространственно-количественный подход к явлениям внешнего мира.

Алгебра — та область математики, в которой особенности абстракции проявляются наиболее выпукло. Объекты геометрии все еще остаются достаточно конкретными — это пространственные формы реального мира. Мыслить категориями таких форм — неотъемлемое свойство человеческого ума, а потому математика без геометрии в принципе невозможна. Однако, оставаясь областью математики с конкретными объектами исследования, геометрия неизбежно должна подпасть под влияние области, полностью освободившейся от такой конкретности. Таковою в данном случае является алгебра.

Не следует думать, что в результате открытия Декарта алгебра подчинила себе геометрию. Подчинения не произошло. Получилось лишь соединение обеих областей в одно целое в виде аналитической геометрии, соединение, одинаково благотворное как для алгебры, так и для геометрии. Переходя через посредство метода координат от геометрии к алгебре, мы сначала как бы полностью забываем о том, что имеем дело с геометрией. Но затем, когда алгебра помогла нам найти некоторый результат, к геометрии следует обязательно вернуться, чтобы узнать, что же означает полученный результат на языке геометрии. Без такого возврата, без сознания необходимости такого возврата аналитическая геометрия, очевидно, была бы не нужна.

Сейчас трудно представить себе какую бы то ни было область знания, где бы в той или иной форме не встречались с понятиями аналитической геометрии.

Когда мы видим над койкой больного температурную кривую,— это аналитическая геометрия. Здесь по оси абсцисс откладывается время, по оси ординат — температура. Взглянув на эту температурную кривую,

каждый врач мгновенно составит себе четкое представление о течении болезни, по крайней мере в одном из ее проявлений.

Когда штурман прокладывает на карте маршрут корабля,— это тоже аналитическая геометрия. Земная поверхность предварительно отображается на плоскость, в результате чего получается географическая карта. Координаты каждой точки такой карты есть некоторые функции географических координат (широты и долготы) соответствующей точки на земной поверхности, их при желании можно сделать равными этим координатам. Каждый маршрут — это некоторая кривая. Кривая будет той или иной в зависимости от того, какие цели ставит перед собой штурман. Если эта цель — направить корабль по кратчайшей линии на земной поверхности, получится одна кривая. Если заставить его пересекать все меридианы под одним и тем же углом (это упростит задачу рулевого — надо будет держать руль все время на одном и том же румбе), получают так называемую локсодрому. На разных картах такая локсодрома выглядит по-разному, штурману надо знать, как выглядит ее уравнение в тех координатах, к которым отнесена карта. Зная уравнение, он вычислит координаты точек, через которые пройдет кривая, а следовательно, отметит и те места, через которые пройдет корабль. Зная уравнение, он может вычислить (точно или приближенно) длину дуги кривой, а потому будет знать время, в течение которого корабль, двигаясь по заданной траектории, придет в определенный пункт земной поверхности и т. д.

А как летают космические корабли, по каким траекториям, как рассчитать эти траектории?

Корабли летят по траекториям, определяемым законом всемирного тяготения. Если речь идет об отдельном корабле и одной отдельно взятой планете, около которой он пролетает, то траектория — одна из кривых второго порядка. Такая траектория будет иметь определенное уравнение в какой-либо системе координат, связанной с Землей, с Солнцем или с «неподвижными» звездами. Аналитическая геометрия дает возможность найти это уравнение и тем самым указать положение корабля в любой момент времени.

Следует, однако, сказать, что каждая планета, каждый космический корабль — это не точка, а потому пути движения корабля — это далеко не те идеальные

кривые второго порядка, которые получаются в соответствии с законом всемирного тяготения. Равным образом космический корабль движется в поле не одной планеты, а ряда планет. Траектория его оказывается намного сложнее, чем элементарная кривая второго порядка. Рассчитать такую траекторию с помощью той аналитической геометрии, с которой мы познакомились выше, не представляется возможным. На помощь приходят более сильные методы современного математического исследования, но в основе многих из таких методов лежит все тот же метод координат.

Земля на кончике пера

Метод координат позволил французскому астроному Леверье, исследуя неправильности в движении планеты Уран, т. е. отклонения траектории планеты от той, которую она должна была бы иметь по закону всемирного тяготения, высказать предположение о влиянии на ее движение неизвестной планеты. Вскоре новая планета была открыта. Это был, как все прекрасно знают, Нептун. Радости ученых не было пределов — ура! Леверье открыл новую планету «на кончике пера»!

Что это? Обычное научное открытие? А может быть, это романтика научного подвига? Что же такое романтика?

...Ослепительно сверкают под нестерпимо палящими лучами солнца белые барашки на гребнях легких волн, и три грациозных каравеллы с гордо выгнутыми полукружиями парусов тихо скользят по безбрежной поверхности изумрудного океана. Ветер мягко и волнующе ведет свою бесконечную песню среди туго натянутых полотнищ, и загорелый бородатый матрос из бочки на грот-мачте напряженно всматривается в покрытую голубоватой дымкой даль в неизбывной надежде увидеть, наконец, эту землю, пусть дикую и неприветливую, но так долго ожидаемую и желанную...

Или вот так, как у Лермонтова в романе «Герой нашего времени»:

«...И теперь здесь, в этой скучной крепости, я часто, пробегая мыслию прошедшее, спрашиваю себя, отчего я не хотел ступить на этот путь, открытый мне судьбою, где меня ожидали тихие радости и спокойствие душевное... Нет! я бы не ужился с этой долею! Я, как матрос, рожденный и выросший на палубе разбойничьего брига; его душа сжилась с бурями и битвами, и, выброшенный

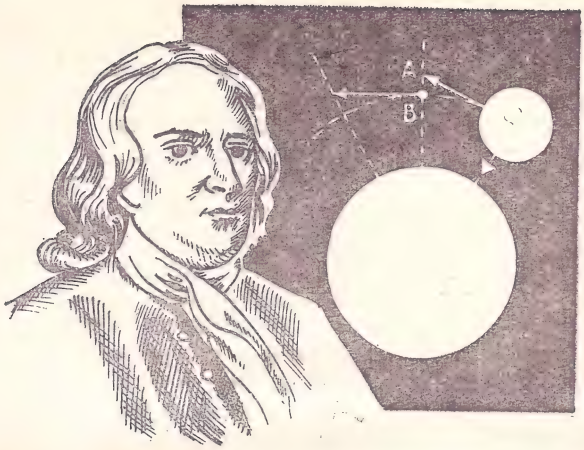
на берег, он скучает и томится, как ни мани его тенистая роща, как ни свети ему мирное солнце; он ходит себе целый день по прибрежному песку, прислушивается к однообразному ропоту набегающих волн и всматривается в туманную даль: не мелькнет ли там на бледной черте, отделяющей синюю пучину от серых тучек, желанный парус, сначала подобный крылу морской чайки, но мало-по-малу отделяющийся от пены валунов и ровным бегом приближающийся к пустынной пристани...»

Кто посмеет сказать, что это не романтично? Это всегда было, есть и будет романтичным, каких бы высот ни достиг научно-технический прогресс. Это романтика моря, романтика путешествий и географических открытий, это Жюль Верн и Майн Рид, Кук и Лаперуз, это покрытые экзотическими зарослями острова и высоченные голубые айсберги...

Ну, а если вот так:

...Лапма под белым абажуром мягким светом заливает небольшую комнату, уставленную рядами шкафов и полок. На столе беспорядочно разбросанные листы бумаги, на которых — ничего, кроме формул и коротких пояснений. За столом молодой человек (пусть пожилой человек, пусть с всклокоченными волосами, а пусть и нормально, как все люди, причесанный). Он то пишет что-то на листках, то бросает написанное в мусорную корзинку под столом, то встает и ходит по кабинету, то ложится на диван...

Вот так и Леверье свыше ста лет назад. Имя исследователя, имя путешественника было бы окружено романтическим ореолом, если бы ему, после долгих, полных опасности и приключений странствий, удалось открыть новый архипелаг, новый материк, новый горный массив. Открытие же Леверье мы к разряду романтики, очевидно, не отнесем, по крайней мере при первом взгляде на него. А почему? Разве это не есть подвиг? Разве это не есть триумф ума и непреклонной настойчивости? Разве ученый, водя пером по бумаге, испытал меньше душевного волнения, чем матрос, сидящий в бочке на грот-мачте каравеллы? Человек подарил миру целую планету! И сделал это, не сходя с места, на обшаривая с помощью межпланетного корабля просторы нашей Солнечной системы. Отказать такому человеку в романтическом ореоле мы не имеем права. Это — тот же Лаперуз, тот же Кук.



Однако, восторгаясь открытием Леверье, мы почему-то забываем о том, что это открытие было вовсе не единственным в своем роде. В XVII ст., опираясь на свою теорию тяготения, И. Ньютон высказал предположение, что Земля не является шаром. Действительно, поскольку экваториальные ее части испытывают бóльшие центробежные силы, противостоящие силам притяжения к центру, по сравнению с частями, прилежащими к полюсам, то, очевидно, и отстоять от центра они будут дальше. Зная скорость вращения Земли и ее размеры, можно приблизительно подсчитать и величину сжатия.

Парижская академия наук организовала серию экспедиций, имевших целью путем непосредственных измерений на земной поверхности выяснить характер искривленности меридиана. Экспедиции проводились на разных широтах и подтвердили предположения Ньютона.

Участником высокоширотной экспедиции оказался, в частности, и молодой академик Мопертюи (он возглавил экспедицию). Доклад Мопертюи на заседании академии произвел сенсацию. Дело в том, что незадолго перед этим экспедиция академии, возглавляемая Кассини, производила градусные измерения меридиана на территории Франции. Экспедиция получила результаты, касающиеся искривленности меридиана на этой территории. Экстраполировав эти результаты на весь меридиан, Кассини пришел к выводу, что Земля не сжата, а, наоборот, вытянута вдоль оси.

Открытие Мопертюи с блеском опровергало этот в высшей степени курьезный вывод. Вольтер, близкий друг Мопертюи, поздравил последнего с замечательным научным достижением и с тем, что ему, Мопертюи, удалось «расплющить земной шар, а заодно и графа Кассини». Однако через несколько лет дружбе с ученым пришел конец. И, как и следовало ожидать, похвалы уступили место хуле. Мопертюи? Кто он такой? И что он сделал? В результате появились следующие стихи, полные свойственного Вольтеру сарказма:

Посланец физики, отважный мореход,
Преодолев и горы, и моря,
Влача квадрант средь снега и болот,
Почти что превратившись в лопаря[1],
Узнал ты после множества потерь,
Что знал Ньютон, не выходя за дверь!

Не будем вмешиваться в ссору двух выдающихся людей. Это их личное дело. Но вот что интересно — подметил-таки великий острослов самое характерное в факте: Ньютон действительно установил сплющенность Земли не выходя за дверь. На кончике пера! Как потом Леверье! Но, странная вещь — о Леверье говорят все именно в контексте, где хотят подчеркнуть могущество математики. О Ньютоне тоже говорят много, даже, естественно, больше, чем о Леверье, но почему-то не обращают внимания на то, что ведь открытие Ньютона того же самого порядка, что и открытие Леверье, и сделано оно было на много десятков лет ранее Леверье. И подобных примеров множество.

Здесь необходимо сделать одну оговорку. В соответствии с Ньютоном, Земля, испытывая сжатие по оси, оказывается эллипсоидом вращения, т. е. поверхностью, образованной вращением эллипса вокруг его малой оси (рис. 19). На более точных картах, чем те, где Земля рассматривается как шар, наша планета принимается за такой эллипсоид. Он называется *референц-эллипсоидом*.

Однако, если придерживаться еще большей точности, то Земля не будет и эллипсоидом вращения. Она лишь приблизительно напоминает эллипсоид. Истинная форма Земли — это ее собственная форма, которая по этой причине и названа *геоидом*. Слово «геоид» в переводе означает поверхность, похожую на Землю. Это не та

[1] Экспедиция проводилась в Лапландии.

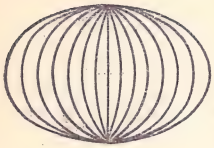


Рис. 19

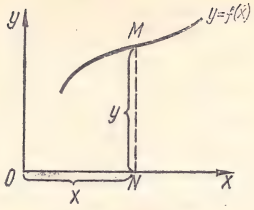


Рис. 20

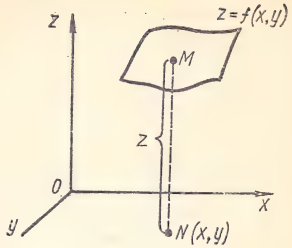


Рис. 21

поверхность, которая образована всеми впадинами и возвышенностями Земли. Мы получим геоид, если прорежем всю Землю сетью тонких каналов и заполним их водой. Убрав теперь все то, что оказывается выше воды, мы и придем к геоиду. Мысль о том, что Земля имеет неправильную форму, высказал великий французский математик и механик Лаплас. Он же предложил и название для такой формы (геоид).

Кстати, догадаться, что мы имеем дело вот с таким телом неправильной формы, это ведь не меньше, чем открыть Нептун. Это открытие тоже было сделано на кончике пера, средствами современной Лапласу математики. Эта математика была бы немыслима без метода координат и его естественного следствия — дифференциального и интегрального исчисления.

Использование метода координат не только автоматизирует, упрощает решение геометрической задачи, оно в значительной мере помогает и самой геометрической интуиции. Если бы мы не приучили себя каждую функцию одного аргумента представлять в виде некоторой плоской кривой (рис. 20), а функцию двух переменных — в виде некоторой поверхности (рис. 21) (здесь уже используется метод координат в пространстве), то весьма сомнительно, сумели ли бы мы обнаружить даже простейшие свойства таких функций. Раз возникнув, такое представление дает нам возможность предположить у функции такие свойства, сама мысль о которых без этого представления нам бы, вероятно, не пришла и в голову. Чуть позднее, вернувшись к великим задачам древности и следствиям, к которым привело упорное нежелание математиков отказаться от поисков решения этих задач, мы увидим, как работает метод координат. Сейчас же вернемся к нашему герою.

Ученый д'Артаньян Что же произошло с творцом аналитической геометрии после того, как мы оставили его в конце 1618 г. в голландском городе в обществе своего учителя и друга Бекмана?

Мысли о новой математике еще не были приведены в такое состояние, что их можно было бы записать в виде математического или философского рассуждения. Это было осуществлено лишь в 1637 г., когда, работая над своим капитальным сочинением «Опыты», Декарт включил в него и небольшой раздел под названием «Геометрия». Однако основные идеи, содержащиеся в «Геометрии», были намечены уже тогда, когда молодой солдат-волонтер находился в Бреда.

Полк, в котором служил Декарт, бездействовал. Провинциальная Голландия была уже достаточно хорошо изучена. В частности, Декарт начинает довольно сносно понимать голландский язык и говорить на нем. Молодой солдат решает поехать в Германию под предлогом службы в католических войсках. В то время в Европе уже шла Тридцатилетняя война. Огибая театры военных действий, пришлось ехать кружным путем — через Копенгаген, Данциг, Польшу, Венгрию. Достигнув Германии, Декарт записывается в армию герцога Максимилиана Баварского. Однако его меньше всего прельщает мысль о защите интересов германского императора Фердинанда, для которого, собственно, и набиралась армия. Цель у Декарта была совсем иной — расширить свои знакомства в научном мире, и сделать это было лучше всего при дворе императора.

Сохранилось очень мало достоверных сведений об участии Декарта в военных операциях. Возможно, что ему довелось участвовать в одном из центральных сражений Тридцатилетней войны — битве у Белой горы, под Прагой. Мы знаем то, что случилось после этой битвы.

Надоевшая ему армия оставлена, все военные перипетии (для него) позади, и можно уже, распрощавшись с Германией, возвращаться домой.

Молодой солдат-ученый вместе со своим слугой, преодолев множество препятствий, вызванных войной, добирается, наконец, до Фрисландии и за умеренную плату договаривается со шкипером одного небольшого судна о переезде во Францию.

Крохотное судно было приспособлено только для плавания вдоль берега. Кроме капитана и его помощника, экипаж насчитывал еще несколько матросов, в обязанности которых входила забота о парусах на двух невысоких мачтах и мытье потрескавшейся палубы. Пассажирам отвели небольшую каюту на корме.

Поздней ночью, устав ворочаться на деревянной койке в тесной и душной каюте, Декарт вышел на палубу и, облокотившись на веревочный барьер, окружавший её, с удовольствием отдался очарованию ночного Северного моря. Яркая луна развернула на черной воде ослепительную дорожку, мерно покачивающуюся в такт волнам и призывно манящую к чему-то неизведанному, таинственному, вечному. Иногда набегающая волна, с шумом ударившись о борт, разлеталась мириадами сверкающих капель и обдавала замечтавшегося морехода соленой прохладой. Иногда в феерическом свете великолепной луны поверхность моря внезапно перерезалась острым и решительным плавником какого-то его неизвестного обитателя и вновь надолго замирала в своей колеблющейся неподвижности. Вдали, почти у самого горизонта, мелькали светящиеся точки — может быть, бортовые огни проплывавших больших кораблей, может быть, сполохи далекой и неслышимой грозы...

Стоя в тени косо нависающего над бортом большого паруса, Декарт медленно перебирал в памяти и только что промелькнувшие события военной жизни, и картины далекого детства, проведенного в маленьком Лаэ на берегу очаровательного ручья, и годы учения у иезуитов.

Понадобилось какое-то сознательное усилие для того, чтобы стряхнуть с себя оцепенение и прислушаться к словам, долетавшим от штурвального колеса. Декарт узнал голоса помощника капитана и того чернобородого широкоплечего матроса, который поразил его двусмысленным выражением своего лица еще в то время, когда они грузились на корабль. За деланным безразличием Декарт усмотрел тогда плохо скрытое жадное внимание к нему самому, а еще больше к тяжелому сундуку, который его слуга, осторожно ступая по сходням, заносил на корабль.

Разговаривали по-голландски.

— Ты уверен, что француз не понимает голландского языка?— спросил помощник капитана.

— Так же, как в том, что сейчас ночь,— ответил матрос.— Еще в порту я нарочно крикнул долговязому Гуддену, который стоял рядом с солдатом, чтобы он остерегался его длинного носа больше, чем его длинной шпаги, однако ни француз, ни его слуга не повели даже ухом. Если бы такое было сказано у нас, любой парень полез бы в драку.

— Ну, это еще ни о чем не говорит,— возразил помощник капитана.— Впрочем,— добавил он после некоторого молчания,— возможно, что ты и прав. Тем лучше для нас.

Разговаривающие замолчали. Несколько минут спустя снова заговорил помощник капитана.

— Когда ты хочешь разделаться с ними?— спросил он.

— Завтра с наступлением темноты,— ответил чернобородый.— Надо, чтобы они не успели запереться в своем ящике. Я уже предупредил Гуддена, у нас все готово.

— Капитан знает?

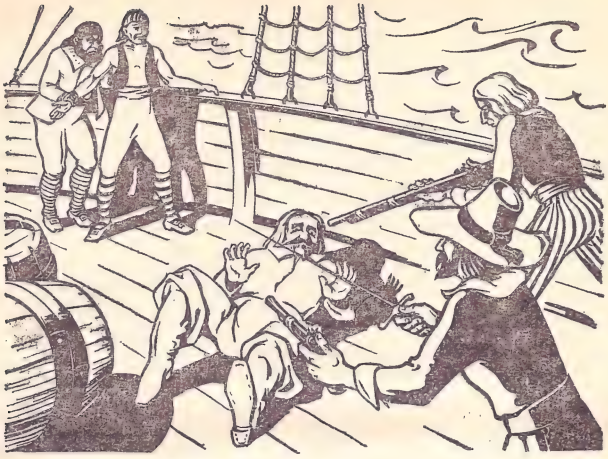
— Гудден сказал ему. Только чур. Сундук идет мне, все остальное могут разделить между собой другие.

Снова молчание, и снова прервал помощник капитана.

— Будет так, как скажет капитан. Не зарывайся, Черный. Тебе уже раз устроили казнь святого Варфоломея, когда ты попытался обойти других. Смотри, после второго раза тебе уже не придется дожидаться третьего — ты понесешь в ад собственную шкуру своими же руками.

Декарт слышал, как чернобородый сделал шумный выдох через ноздри и недовольно засопел. Времени терять было нельзя. Осторожно ступая по наиболее густо затененным участкам палубы, Декатр добрался до дверей каюты, быстро закрыл ее на засов и, стараясь не произвести ни одного лишнего звука, разбудил слугу. Как пригодилось ему знание голландского языка, который он быстро выучил с помощью добряка Бекмана! И как чудесна его звезда, которая вытолкнула его на палубу именно в тот момент, когда пираты так неосторожно уточняли план своего гнусного злодеяния. Против этого плана был быстро выработан контрплан. Только молниеносность и решительность могли обеспечить ему успех.

На рассвете обрисовывались контуры извилистого берега, открывавшегося с левого борта. Ветер переменил



направление, и вся команда была вызвана наверх, к парусам.

Когда капитан появился на палубе, корабль уже плавно удалялся от берега, огибая далеко выдающуюся в море косу.

Вдруг двери пассажирской каюты широко распахнулись, и оба француза стремительно выскочили из нее. Ловким ударом Декарт свалил с ног капитана и в то же время дуло мушкета, который держал его слуга, было приставлено к затылку поверженного. С пистолетом в одной и шпагой в другой руке Декарт молниеносно обернулся ко всей остальной шайке и закричал по-голландски:

«Ни с места, негодяи! Одно движение — и мы продырявим ему голову».

Пираты, застигнутые врасплох, застыли в неподвижности. Оказывается, француз знал голландский язык! Вот тебе и шутка с его длинным носом.

Дальнейшее было делом нескольких минут. Выскочив на капитанский мостик, Декарт приказал зарифить паруса, сделать поворот на левый галс, и вскоре корабль мягко зарылся в прибрежный песок. Переведя дуло пистолета на капитана, Декарт приказал своему слуге побросать вещи на землю, спрыгнуть с корабля и взять на прицел помощника. После этого спрыгнул сам. Отбросив шпагу, он взял в левую руку второй пистолет.

Под прицелом трех стволов пираты вновь распустили

паруса, оторвались от берега и через некоторое время удалились.

Смельчаки были свободны. Угрозы пиратов, потрясающих кулаками и, судя по движениям, изрыгающих проклятия, их уже нисколько не беспокоили. Перед ними была Франция. Несколько дней пути, и вот уже родная Турень встречает своего непоседливого сына и его верного оруженосца.

Таким был Декарт, смелый ученый и бесстрашный человек. Он сам рассказал в своих воспоминаниях о стычке с пиратами во время морского путешествия. Ему удалось с помощью шпаги, которой он владел, вероятно, с дартаньяновским мастерством, принудить пиратов пристать к берегу и дать возможность высадиться ему и его слуге. Возможно, что и не в ночной темноте подслушал он разговор пиратов, что и не угрозой жизни капитана ему удалось подчинить себе всю команду, как об этом мы только что рассказывали, а возможно, что всё происходило именно так.

После нескольких лет жизни во Франции — путешествие в Италию. Декарт посетил Рим, Венецию, Флоренцию, Лорето. (Последнее рассматривалось им как выполнение обета, данного лоретской богоматери еще в то время, когда в «вещих» снах открылось ему существо новой, универсальной, по его словам, науки). Жизнь в Париже полна светских развлечений, научных и литературных диспутов. Декарт все более и более склоняется к мысли изложить на бумаге свои взгляды на вещи. Это ему настоятельно советуют его многочисленные друзья. Однако Франция с ее религиозной нетерпимостью и светским абсолютизмом была мало пригодна для этой цели. Декарт снова подумал о милой и гостеприимной Голландии, добрую память о которой не сумела стереть и стычка с пиратами. Это была страна, где, как нигде в другом месте, «можно наслаждаться полной свободой, где можно спать с полной безопасностью», — писал он.

Большой непоседа, Декарт переезжает сначала в Дортрехт, к своему старому другу (по давности дружбы, но не по возрасту) Бекману. Спустя некоторое время он меняет Дортрехт на Франекер, а затем живет то в Амстердаме, то в Лейдене, Девентере, Утрехте, Гардервике и др.

Здесь, в Голландии, Декарт и написал свою «Геометрию», совсем небольшое сочинение, которое, однако,

по праву считается жемчужиной геометрической литературы.

Декарт, по его словам, был противником «кропания» толстых книг. Он говорил, что потомки будут ему благодарны не только за то, что он сказал, но и за то, чего он не сказал и тем самым дал им возможность и удовольствие додуматься до этого самостоятельно, с помощью, разумеется, тех концепций, начало которым он положил.

Если хочешь быть хорошим математиком

Во Францию ученый приезжает лишь несколько раз и то на непродолжительное время. Его трактатами зачитываются во всех странах Европы, имя его приобретает всемирную известность. Шведская королева Христина приглашает его переехать на жительство в Стокгольм. В числе прочих дел, которыми занимался Декарт в Стокгольме, была и работа над проектом устава Шведской академии наук. Но главным его занятием, по желанию королевы, были регулярные занятия с нею самою философией. Декарту пришлось поступиться своими привычками. Еще с детства он усвоил обычай подолгу оставаться в постели поутру, предаваясь размышлениям над вопросами математики, физики, философии. Эти утренние часы были самым продуктивным временем. Мысли, пришедшие в эти часы, оставалось потом лишь привести в порядок и записать.

Привычке Декарта был положен конец. Нужно было, по примеру неугомонной королевы, вставать ранним утром и в пять часов уже начинать занятия с нею. Декарт с горьким юмором говорил тогда, что если хочешь быть хорошим математиком и сохранить при этом здоровье, то следует расставаться с постелью лишь тогда, когда почувствуешь желание сделать это. Простудившись во время продолжительных поездок во дворец в холодной карете, ученый получил воспаление легких и спустя девять дней после начала болезни умер. Это случилось 11 февраля 1650 г. Он не дожил трех недель до 54 лет.

Спустя 16 лет, в 1666 г., его прах был перевезен в Париж. Гроб был установлен сначала в церкви Павла, а затем, в 1667 г., был перенесен в усыпальницу великих людей Франции — церковь святой Женевьевы, покровительницы Парижа, знаменитый Пантеон, в котором нашли свое последнее пристанище многие выдающиеся умы страны.

Время, которое нуждалось в титанах

Мы не пишем истории математики. Наша задача — найти в этой истории такие эпизоды, которые бы представляли ее в наиболее интересном виде, привлекательном не только для самих математиков, но и для тех, кто имеет к математике лишь отдаленное отношение. Коль скоро, однако, мы заговорили об одном из величайших открытий в истории математики, то совершенно очевидно, что нельзя обойти молчанием и тех обстоятельств, которые явились причиной этого открытия. Потому ли оно произошло, что появился такой выдающийся ученый, как Декарт? А если бы не было Декарта? А если бы он появился на несколько столетий позднее?

Наверное, кое-что происходило бы по-иному. Но ни в чем существенном положение не изменилось бы. Не было бы Декарта, был бы другой или другие ученые, которые выразили бы насущнейшие потребности своего времени. Открытие Декарта — вовсе не следствие только личностных качеств самого Декарта. Оно было подготовлено всем ходом исторического развития человеческого общества. Позволяя себе некоторую категоричность суждений, скажем, что если бы не было Евклида,— не было бы и Декарта. Или если бы был Декарт, но не было бы потребности в его открытии,— это был бы *не тот* Декарт.

Семнадцатый век, типичным представителем которого был Декарт, является поворотным не только в математике, но и в естествознании вообще. Причина бурного развития естествознания с XVII ст. заключается в необычайно возросших экономических ресурсах европейских государств, в том, что на арену политической жизни выступил новый класс — буржуазия. Движимый поисками новых путей для своего развития, этот класс ломает все преграды, которые устанавливает на его пути средневековая аристократия. Являясь в то время прогрессивной частью общества, буржуазия смело разрушает догматы христианской религии, верной прислужницы дворянского абсолютизма, не успевшей еще приспособиться к потребностям нового класса. Научное естествознание, находившееся под проклятием церкви, утверждается буржуазией как одно из основных средств ее господства. Во многих странах создаются научные объединения, академии, находившие щедрую поддержку со стороны

финансовых магнатов, начинают издаваться научные журналы, оживляется обмен мнениями между учеными, их переписка. Особое развитие получает механика. Ее положения распространялись на все явления жизни, какой бы природы они ни были. Для того времени это было прогрессивным явлением, и лишь впоследствии механистическое объяснение мира стало тормозом в развитии научного естествознания.

Новые задачи, возникавшие перед исследователями, требовали и новых методов исследования. Методы древних греков и средневековых ученых уже не могли удовлетворить возросших потребностей. Эти методы носили слишком узкий характер, делавший их пригодными для решения лишь ограниченных классов задач, или приводили к слишком утомительным громоздким построениям.

Перед новой наукой встала потребность в создании таких методов, которые, обладая возможностью наиболее широких приложений, были бы достаточно простыми и компактными. XVII ст. и ознаменовалось появлением трех исключительных по силе и значению созданий человеческого ума — логарифмов, аналитической геометрии и исчисления бесконечно малых (дифференциального и интегрального исчисления). Эти три открытия можно было бы коротко определить следующим образом: метод наиболее экономного и эффективного выполнения вычислений, метод сведения разнообразных процессов реальной действительности к общим законам алгебры и, наконец, метод пределов, наиболее точно отражающий непрерывность механических процессов.

Создание новых методов, свидетельствуя о расцвете математики, привело к еще более бурному ее развитию — за несколько десятилетий новые методы дали возможность получить столько результатов, сколько старые не могли дать и за столетия.

Уравнения

А теперь вернемся к нашим великим задачам и вновь поставим вопрос: можно или нельзя их решить с помощью циркуля и линейки? Теперь, когда мы ознакомились с методом координат, можно попытаться найти ответ на этот вопрос с помощью алгебры.

Что мы, собственно, делаем, когда решаем задачу с помощью циркуля и линейки? Проводим прямые, окружности, находим точки их пересечения, через най-

денные точки проводим новые прямые, новые окружности, делаем эти точки центрами новых окружностей, выбираем произвольно какие-то точки на плоскости, на заданных прямых, окружностях и т. д. Выберем на плоскости некоторую прямоугольную декартову систему координат. Тогда каждая точка этой плоскости будет иметь определенную пару координат (a, b), каждая прямая — уравнение:

$$Ax + By + C = 0,$$

каждая окружность — уравнение:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0.$$

Коэффициенты этих уравнений — определенные числа.

Пусть мы имеем теперь некоторую пару прямых, заданных или проведенных нами:

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 &= 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Найти точку их пересечения — это значит найти решение записанной пары линейных уравнений. Исключая из (11) y, придем к равенству

$$(A_1B_2 - A_2B_1)\,x + (C_1B_2 - C_2B_1) = 0. \tag{12}$$

Решив уравнение (12), мы найдем y из любого уравнения (11). Таким образом, нахождение точки пересечения двух прямых сводится к решению линейного уравнения (12), коэффициентами которого являются некоторые целые рациональные функции коэффициентов уравнений (11), т. е. такие функции, которые получаются из указанных коэффициентов с помощью операций сложения, вычитания и умножения.

Пусть теперь нам заданы (или проведены нами) прямая и окружность. Их уравнения:

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1 &= 0, \\ x^2 + y^2 + A_2x + B_2y + C_2 &= 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Чтобы найти точки их пересечения, надо решить эти уравнения. С этой целью из первого находим y и подставляем во второе:

$$y = -\frac{A_1x + C_1}{B_1},$$

$$x^2 + \left(\frac{A_1x + C_1}{B_1}\right)^2 + A_2x - B_2\frac{A_1x + C_1}{B_1} + C_2 = 0.$$

Последнее уравнение перепишем в виде

$$(A_1^2 + B_1^2)\,x^2 + (2A_1C_1 + A_2B_1^2 - A_1B_1B_2)\,x + C_1^2 - \\ - C_1B_1B_2 + C_2B_1^2 = 0. \qquad (14)$$

Имеем квадратное уравнение, коэффициенты которого — целые рациональные функции от коэффициентов уравнений (13). Правда, по сравнению с уравнением (12) эти рациональные функции включают в себя также и операцию возведения в степень (здесь — во вторую) коэффициентов уравнений (13). Эту операцию, однако, можно рассматривать как повторное умножение, поэтому данное ранее определение целой рациональной функции остается в силе.

Запишем уравнение (14) в виде

$$ax^2 + 2bx + c = 0, \qquad (15)$$

его корни есть

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}. \qquad (16)$$

Запомним, что коэффициенты a, b, c есть целые рациональные функции коэффициентов уравнений (13).

Пусть теперь нам даны две окружности:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ x^2 + y^2 + A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{aligned} \qquad (17)$$

Чтобы найти точки их пересечения, надо решить эти уравнения относительно x, y. Казалось бы, имеем два квадратных уравнения, поэтому решение их сведется, вероятно, к уравнению, степень которого не ниже четвертой. Между тем это не так. Действительно, вычтем из первого уравнения второе и результат припишем к одному из уравнений (17) (например, к первому):

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ (A_1 - A_2)\,x + (B_1 - B_2)\,y + C_1 - C_2 = 0. \end{aligned} \qquad (18)$$

Коэффициенты второго уравнения — целые рациональные функции от коэффициентов уравнений (17). Легко видеть, что система (18) эквивалентна системе (17) (если ограничиться конечными решениями уравнений). Но система (18) есть система вида (13), с которой мы уже имели дело. Следовательно, ее решение, а потому и решение системы (17) сводится к решению системы (13)

с коэффициентами, являющимися целыми рациональными функциями коэффициентов уравнений (17).

Если, например, нам нужно провести прямую через две заданные точки (координаты их заданы) или окружность заданного радиуса с центром в заданной точке (координаты центра и радиус заданы), то мы придем к уравнениям прямой и окружности, коэффициентами которых будут также целые рациональные функции от упомянутых координат и радиуса.

Итак, на первой стадии решение задачи с помощью циркуля и линейки сводится к решению уравнения — или линейного (12), или квадратного (15).

На следующих стадиях через найденные точки снова проводим прямые или окружности. Снова придем к уравнениям вида (12) или (15), но теперь их коэффициенты будут уже целыми рациональными функциями от предыдущих коэффициентов, от каких-либо новых, которые встретятся при решении задачи, а также от чисел вида (16). Например, получили уравнение следующего вида:

$$\frac{-b_1+\sqrt{b_1^2-a_1c_1}}{a_1}x^2+\frac{-b_2+\sqrt{b_2^2-a_2c_2}}{a_2}x+1=0. \quad (19)$$

Запишем его так:

$$-\frac{b_1}{a_1}x^2-\frac{b_2}{a_2}x+1=-\frac{\sqrt{b_1^2-a_1c_1}}{a_1}x^2-\frac{\sqrt{b_2^2-a_2c_2}}{a_2}x.$$

Возведем в квадрат обе части:

$$\left(-\frac{b_1}{a_1}x^2-\frac{b_2}{a_2}x+1\right)^2=\frac{b_1^2-a_1c_1}{a_1^2}x^4+$$

$$+\frac{b_2^2-a_2c_2}{a_2^2}x^2+2\frac{\sqrt{b_1^2-a_1c_1}\sqrt{b_2^2-a_2c_2}}{a_1a_2}x^3. \quad (20)$$

Перенесем члены, не содержащие квадратных радикалов, в левую часть и снова возведем в квадрат обе части. Придем к уравнению 8-й степени:

$$\left[\left(-\frac{b_1}{a_1}x^2-\frac{b_2}{a_2}x+1\right)^2-\frac{b_1^2-a_1c_1}{a_1^2}x^4-\right.$$

$$\left.-\frac{b_2^2-a_2c_2}{a_2^2}x^2\right]^2-4\frac{(b_1^2-a_1c_1)(b_2^2-a_2c_2)}{a_1^2a_2^2}x^6=0, \quad (21)$$

или

$$p_0x^8 + p_1x^7 + \cdots + p_7x + p_8 = 0.$$

Можно считать, что последнее уравнение приведено к общему знаменателю и знаменатель отброшен. Тогда все коэффициенты, очевидно, будут некоторыми целыми рациональными функциями от a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2. Идя обратным путем, мы можем привести это уравнение к последовательности квадратных уравнений (20), (19). Это означает, прежде всего, что мы рассматриваем само уравнение (21) как квадратное относительно выражения, стоящего в квадратных скобках. Извлекая квадратные радикалы, придем к уравнению (20) (из двух знаков перед радикалом берем тот, который соответствует уравнению (20). В свою очередь, уравнение (20) рассматриваем как квадратное относительно выражения, стоящего в круглых скобках. Извлекая квадратные радикалы, придем к уравнению (19) (знак перед радикалом берем тот, который соответствует этому последнему уравнению).

Заметим, что степень уравнения (21) равна 8, т. е. 2^3. Это соответствует тому, что квадратное уравнение (19) было еще два раза возведено в квадрат. И так будет всегда — задача, решаемая с помощью циркуля и линейки, приводится к решению алгебраического (т. е. такого, у которого в левой части стоит полином) уравнения степени 2^n. Коэффициентами этого уравнения являются некоторые целые рациональные функции от параметров, которыми определяются произвольно выбираемые точки, прямые, окружности и т. д., причем не только на первой стадии, но и на последующих. Поскольку эти параметры произвольны, то ничто не мешает, в частности, считать их целыми числами. Если задача решается циркулем и линейкой при произвольном выборе параметров, то она, конечно, будет решаться и тогда, когда этими параметрами будут целые числа.

Итак, задача решается с помощью циркуля и линейки только тогда, когда алгебраическое уравнение

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0, \quad a_0 \neq 0 \qquad (22)$$

с целыми коэффициентами имеет степень вида $n = 2^k$ и сводится к цепи квадратных уравнений. Высказанное условие будет и достаточным условием разрешимости задачи с помощью циркуля и линейки.

Следует обратить внимание на то, что произвольными целыми числами мы считаем параметры, функциями которых являются коэффициенты уравнения (22). Может случиться, что при произвольном выборе таких параметров коэффициенты уравнений не могут принимать произвольные, независимые друг от друга значения.

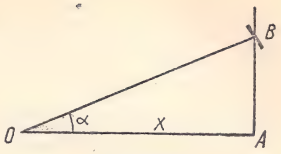


Рис. 22

И еще одно замечание. Может случиться, что степень уравнения, к которому приводится решение той или иной задачи, не равна 2^n. Это еще не будет означать, что задача не решается с помощью циркуля и линейки. Если окажется, что при любом выборе целых параметров уравнение (22) имеет рациональные корни, то задача решается циркулем и линейкой. В этом случае говорят, что уравнение приводимо в поле рациональных чисел.

Таким образом, решение задачи с помощью циркуля и линейки невозможно, если уравнение (22), степень которого не есть степень двойки, неприводимо в поле рациональных чисел.

Обратимся опять к трем великим задачам.

1. Задача об удвоении куба.

Если мы обозначим через a ребро данного куба, через x — ребро искомого, то, в соответствии с условиями задачи,

$$x^3 - 2a^3 = 0.$$

Это есть уравнение вида (22). Его степень не есть степень двойки. В то же время ни при каком целом a уравнение не имеет рациональных корней. Следовательно, задача об удвоении куба с помощью циркуля и линейки не решается.

2. Задача о трисекции угла.

Пусть 3α — величина угла, который надо разделить на три равные части. Мы заранее обозначили эту величину через 3α, чтобы потом не писать троек в знаменателях. Пусть

$$\cos 3\alpha = p.$$

Введем обозначение

$$\cos\alpha = x.$$

Если мы сумеем построить x (рис. 22), то сумеем построить угол α, т. е. третью часть заданного угла. Действительно, отложим $[OA] = x$, в точке A восстано-

вим перпендикуляр и раствором циркуля, равным единице измерения, сделаем на нем засечку, получим точку B, $\widehat{AOB} = \alpha$.

С другой стороны,

$$\cos 3\alpha = \cos(2\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha \cdot \cos\alpha - \sin 2\alpha \cdot \sin\alpha =$$
$$= (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\cos\alpha - 2\sin^2\alpha\cos\alpha = (2\cos^2\alpha -$$
$$- 1)\cos\alpha - 2(1 - \cos^2\alpha)\cos\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha =$$
$$= 4x^3 - 3x.$$

Таким образом,

$$4x^3 - 3x - p = 0.$$

Это и есть уравнение, к которому приводит решение задачи о трисекции угла. Степень уравнения не есть степень двойки. Вместе с тем при произвольном выборе параметра p уравнение неприводимо в поле рациональных чисел. Следовательно, задача о трисекции угла с помощью циркуля и линейки не решается.

3. Задача о квадратуре круга.

Пусть r — радиус данного круга, x — сторона искомого квадрата. Тогда, приравнивая их площади, будем иметь

$$x^2 - \pi r^2 = 0. \qquad (23)$$

К такому уравнению приводится решение задачи.

Пусть r — произвольное целое число. Мы не получили уравнения (22), так как в (22) коэффициенты — целые, а в (23) — нет. Но, может быть, путем многократного возведения в степень его можно привести к виду (22), т. е. к уравнению с целыми коэффициентами? Если это может быть сделано, то тогда мы прежде всего выяснили бы, есть ли степень полученного уравнения степень двойки, а если нет, то приводимо ли оно в поле рациональных чисел. Однако вопрос о том, приводится ли уравнение (23) (при целом r) к алгебраическому уравнению с целыми коэффициентами, как нетрудно сообразить, сводится к вопросу о том, является ли само число π корнем уравнения такого вида. Число, являющееся корнем алгебраического уравнения с целыми коэффициентами, называется алгебраическим, число, не являющееся таким корнем,— трансцендентным.

Таким образом, возможность или невозможность решения задачи о квадратуре круга циркулем и линейкой сводится к вопросу о природе числа π — алгебраическое

оно или трансцендентное? Если бы оказалось, что это число алгебраическое, то вопрос о решении задачи с помощью циркуля и линейки потребовал бы дальнейшего исследования. Если же число π трансцендентное, то вопрос имел бы отрицательный ответ — задача о квадратуре круга циркулем и линейкой не решается.

Лишь в 1882 г. немецкий математик Линдеман доказал трансцендентность числа π. Задача о квадратуре круга неразрешима.

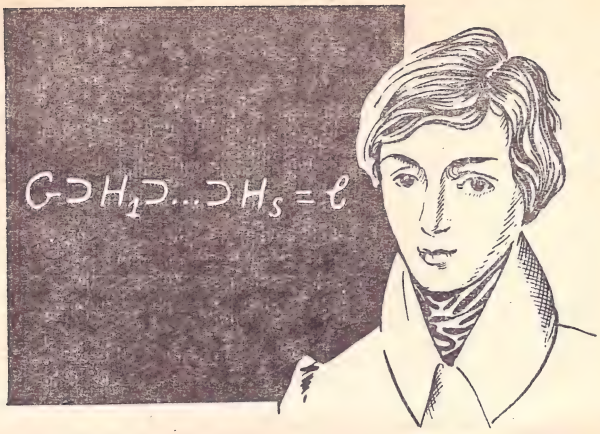
В курсе высшей математики доказывается, что трансцендентным является также число, которое можно представить как предел

$$e = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

Есть ли другие трансцендентные числа? Оказывается, есть, притом их гораздо больше, чем чисел алгебраических. Если наугад взять точку на действительной оси, то вероятность того, что число, соответствующее этой точке, будет алгебраическим, равна нулю, а вероятность того, что это число трансцендентное, равна единице, т. е. почти все действительные числа есть числа трансцендентные. Числа алгебраические можно пересчитать, т. е. поставить во взаимно однозначное соответствие с натуральными числами. Трансцендентные числа такому пересчету не поддаются. Если множество алгебраических чисел счетно, то множество чисел трансцендентных несчетно.

Галуа

Алгебраические уравнения с целыми коэффициентами не являются необходимым конечным результатом, к которому приводит исследование вопроса о разрешимости с помощью циркуля и линейки великих задач древности. В общем случае, когда (в процессе построения) точки, прямые, окружности выбирались произвольно, коэффициенты уравнения могли быть также произвольными, точнее — не обязательно целыми. Такое уравнение получается из некоторого начального квадратного уравнения путем неоднократного возведения в квадрат. Если, наоборот, подвергнуть это алгебраическое уравнение серии извлечения квадратных корней, то мы придем в конечном итоге к такому квадратному уравнению, корни которого оказываются представленными через коэффициенты начального алгебраического



уравнения с помощью последовательных извлечений квадратных корней. В этом случае говорят, что алгебраическое уравнение решается в квадратных радикалах. Вопрос о том, решается или не решается задача с помощью циркуля и линейки, сводится, таким образом, к вопросу, решается или не решается в квадратных радикалах соответствующее этой задаче алгебраическое уравнение.

Каковы же критерии того, решается или не решается в квадратных радикалах алгебраическое уравнение? Ответ на этот вопрос, причем не как на главный, а как на один из второстепенных, дается в теории Галуа.

Кто такой Галуа? Трудно найти, наверное, школьника, который бы не слышал о теории Галуа или не слышал бы имени Галуа. О нем написаны десятки превосходных книг. Одной из лучших является книга, принадлежащая перу выдающегося польского физика Леопольда Инфельда «Эварист Галуа, избранник богов». Трудно рассказать о Галуа лучше, чем это сделал Инфельд.

Галуа был убит на дуэли, когда ему исполнилось немногим более двадцати лет. Галуа называли при жизни неистовым республиканцем, страстности которого, силе его убеждений и непримиримости к реакции не было предела. Есть много оснований полагать, что дуэль была спровоцирована политическими противниками Галуа, постаравшимися сделать все, чтобы убрать его со своего пути.

За несколько часов до гибели в письме, адресованном другу, на нескольких листочках бумаги Галуа изложил

то, что впоследствии было названо теорией Галуа. Эта теория уже более ста лет привлекает к себе внимание математиков. Используя каждую минуту уходящей жизни, торопясь, о многом не договаривая, надеясь, что его поймут со временем, Галуа пишет свою лебединую песнь, вкладывая в нее всю силу своего гения.

Сейчас ни у кого не вызывает сомнений мысль о том, что Галуа был гениальным математиком. Но как когда-то противники Галуа пытались очернить его и то дело, за которое он самоотверженно боролся, так сейчас многие не знают чувства меры, стараясь превознести до небес заслуги математика, приписать ему такие достоинства, которыми он не обладал, сделать из него этакого ангела во плоти.

Известно, что Галуа дважды провалился на вступительных экзаменах в Политехническую школу. Каждый знает, что экзамен — это отчет о своих знаниях во всех тех областях математики, которые определены программой, это отчет о том, насколько ты правильно, последовательно, логически мыслишь, насколько умеешь использовать свои знания при решении задач. На экзамене могут принять во внимание, что в какой-то одной области ты на несколько голов перерос своих сверстников или даже самих экзаменаторов, но это ровно ничего не значит, если ты профан во всем остальном.

Почему Галуа провалился? Скорее всего потому, что, превосходно разбираясь в теории решения алгебраических уравнений, он имел довольно шаткие представления о других разделах математики. Однако нет. Было положено в качестве незыблемой истины, что Галуа плохо разбираться в чем-либо не мог, что вся математика была для него открытой книгой, которую он знал наизусть, не читая ее. Он провалился? Значит виноваты экзаменаторы, которых последующая традиция постаралась оглупить, насколько это было возможно. В одном случае экзаменатор был настолько глуп, что задавал гениальному математику уж слишком элементарные вопросы, Галуа счел ниже своего достоинства отвечать на них. В другом — экзаменатор был еще глупее, он никак не мог понять тех совершенно тривиальных вещей, которые ему пытался объяснить экзаменующийся. Что оставалось делать Галуа? Да ничего другого, как размахнуться и запустить в голову неразбирающегося экзаменатора грязную губку, которой он только что вытирал

доску. Ух, как здорово! Ура господину Галуа! Так им и надо, посредственностям и рутинерам в науке! Он был молод. А молодость будто бы способна создавать гениальные произведения вот так просто, без всякого труда, без всякой подготовки.

Биографы Галуа любят рассказывать об эпизоде, который якобы случился с ним во время его пребывания в Подготовительной школе. Преподаватель школы Леруа, придя в класс, объявил ученикам, что ему стал известен один очень интересный результат по теории решения алгебраических уравнений, который был получен Штурмом, но что доказательства он сообщить не может, так как статья еще не вышла в свет. Все со вниманием слушают. Лишь на лице Галуа блуждает ироническая ухмылка.

— Месье Галуа,— обращается к нему учитель.— Вам кажется элементарным этот результат? Может быть, вы знаете и его доказательство?

Не говоря ни слова, Галуа встает, подходит к доске и берет в руки мел. На мгновение задумывается, и вот из-под его руки с лихорадочной быстротой начинают появляться на доске формулы. Одна, другая, третья... Галуа пишет не останавливаясь. Доска исписана, брошен мел, математик изящным движением стряхивает меловую пыль со своих пальцев. Теорема доказана.

Галуа было в то время 18 лет. Мы уже говорили о том, что к этому времени он многое узнал о решении алгебраических уравнений. Мог он задумываться и над тем, о чем говорится в теореме Штурма (о числе корней уравнения, заключенных в данном промежутке). Но дать с ходу доказательство теоремы, которую математики считают очень серьезной, юноше без основательной математической подготовки — этому трудно поверить. Высказать собственные, даже дельные и остроумные догадки о предмете, пояснить свою мысль на примере — это куда ни шло, но доказывать теоремы, стоя у классной доски, причем вот так сразу, в чистом виде,— это уж слишком.

Мы часто бездумно смешиваем романтическую жизнь Галуа с его научным творчеством и часто же невольно пытаемся представить молодому читателю не настоящего Галуа, а такого, какого сами нарисовали в своем воображении. Романтика романтикой, но не следует забывать, что научное творчество — это труд, труд, о кото-

ром часто без преувеличений можно сказать, что он каторжный. Гений — это прилежание. Так говорил один из создателей Энциклопедии Бюффон. А великий изобретатель Томас Эдисон не уставал повторять, что во всяком изобретении лишь один процент вдохновения и девяносто девять процентов потения. И это при условии, что есть самое главное — способности и призвание к математике. В математике, как и во всякой иной науке, очень много романтики, но никогда не следует забывать о том, что изучение ее — это не сплошной праздник. Нет, часто — это самые прозаические будни, когда надо рано вставать, поздно ложиться, много считать и постоянно думать, думать и думать. Не всякому это по вкусу и не всякому это под силу. Одно дело смотреть на романтику таежных исследований по телевидению в уюте городской квартиры и совсем другое — самому тащиться по тайге с тяжелым рюкзаком за плечами и тучами комаров над головой.

Романтика — прекрасная вещь. Она увлекает в надзвездные миры, она освобождает от мыслей о жизненной суете, она приподнимает, облагораживает мир окружающих вещей, но не мешает время от времени подправить ее трезвым и оценивающим взглядом, отделить в ней пшеницу от плевел...

Теория Галуа, как мы уже отметили выше, не имеет своей единственной целью установление условий, одновременно необходимых и достаточных для того, чтобы алгебраическое уравнение было разрешимо в квадратных радикалах. Это, если можно так выразиться, один из попутных вопросов, в ней решаемых. Главный же ее вопрос — каковы условия разрешимости алгебраического уравнения в радикалах вообще?

Для человека, не знакомого с предметом, этот вопрос может показаться странным — а разве не всякое алгебраическое уравнение разрешимо в радикалах? Ведь квадратное уравнение (15) в радикалах решается, его корни находятся по формуле (16). Разве нельзя найти подобных формул и для произвольного уравнения (22)?

Оказывается, нельзя. Корни уравнения существуют, они представляют определенные функции от коэффициентов, но выразить эти функции через радикалы подобно тому, как это сделано для квадратного уравнения, можно далеко не для каждого уравнения. Подобные выражения смогут быть найдены для уравнений квадрат-

ного, кубического и четвертой степени, что же касается уравнений пятой и более высоких степеней, то для них это в общем случае оказывается невозможным. Однако до того, как это было осознано и доказано, прошло очень много времени, в течение которого пытались найти решение любого уравнения, улучшали алгебраическую символику, вводили новые математические понятия. История этих попыток в высшей степени интересна и поучительна и нисколько не уступает истории попыток решения знаменитых задач древности. Наиболее интересные страницы этой истории приходятся на XVI ст. Откроем их.

Бурное время

Первая половина XVI ст. ...Италия! Эпоха Возрождения! Время, которое по словам Энгельса, нуждалось в гигантах и породило гигантов учености, духа и характера.

Лишь несколько десятилетий отделяют это время от 1492 г., когда вдохновенный генуэзец[1], движимый неуёмной жаждой познания, становится на борт одной из трех каравелл, которые мы видели несколькими страницами раньше на беспредельной глади Атлантического океана, и после нескольких месяцев трудного плавания достигает берегов Америки. Еще меньше времени — от кругосветного плавания Магеллана. Корабль, единственный из пяти, отправившихся в плавание, преодолев тысячи тяжелейших преград, снова у берегов Испании, откуда он вышел три года назад. Корабль — жалкие обломки когда-то блестящей флотилии — причаливает к пирсу, но на его капитанском мостике нет бесстрашного адмирала[2]. Адмирал погиб на неведомых доселе островах. Позднее они были названы именем испанского короля Филиппа II.

Только что закончилась блистательная эпопея в истории итальянского искусства, связанная с именами Рафаэля и Леонардо да Винчи, но еще продолжали создавать свои бессмертные творения Микеланджело и Тициан. Раскапываются античные скульптуры, изображающие человека во всем его неповторимом великолепии, во всей его телесной и духовной красоте, создаются философские трактаты и произведения художественной литера-

[1] Колумб.
[2] Магеллан.

туры, в которых зло высмеивается канонизированная церковью схоластика, на протяжении сотен лет представлявшая собой прокрустово ложе для всякой свободной мысли. Новое захватывает почти все слои населения, новое воспринимается как залог освобождения от гнета, пришедшего из темных глубин средневековья, и в радостном и романтическом свете переживается как настоящий праздник. Начинается возрождение наук, одной из которых является математика. Выводы математики обязательны для всех, она — владычица, она — законодательница, но к этим выводам она пришла не по своему волеизъявлению, а под влиянием жизненных потребностей, под влиянием практики. Царица одновременно оказывается и служанкой.

Полным непередаваемой романтики представляются эпизоды, связанные с открытием общего способа решения уравнений 3-й и 4-й степени.

Еще древние египтяне могли решать уравнения 1-й степени, т. е. уравнения вида:

$$ax + b = c, \tag{24}$$

где a, b, c — некоторые коэффициенты, x — неизвестное. Разумеется, ни о какой символике, которая позволяла бы записывать это уравнение в виде (24), не могло быть и речи. Египтяне, как мы уже говорили, словами формулировали правила, следуя которым можно найти число, представлявшее на нашем языке корень уравнений (24).

Древние могли решать и квадратные уравнения

$$ax^2 + 2bx + c = 0, \tag{25}$$

и некоторые частного вида кубические уравнения (последние умели решать уже вавилоняне). Однако все попытки решить общее уравнение 3-й степени вида

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0 \tag{26}$$

успеха не имели. Причина, в частности, крылась в том, что до конца XVI — начала XVII ст. еще не была

создана символическая алгебра, которая позволяла бы так экономно фиксировать математическую мысль, как это сделано, например, в уравнениях (24), (25), (26). Буквенная символика, как мы уже отмечали выше, появилась в конце XVI ст.

Итальянские математики первой половины и середины XVI ст., о которых пойдет наш рассказ, не располагали еще алгебраической символикой. Тем более должно вызвать восхищение то обстоятельство, что им все-таки удалось найти решение общих уравнений сначала 3-й, а затем и 4-й степени. Уравнения выше 4-й степени, как выяснилось позднее, в общем виде в радикалах решены быть не могут.

Заика и врач

Это случилось в Брешии во время нашествия французов в Италию в самом начале XVI ст. Никколо Тарталья был найден рядом со своим убитым отцом. Широкий палаш французского солдата, поразивший мужчину, задел и лицо ребенка. Перепуганный и травмированный мальчик, оказавшийся в гуще неслыханной резни и грабежа, впал в состояние шока, который наложил на него тяжелый отпечаток. Мальчик стал заикаться, и этот дефект, приносивший ему впоследствии столько огорчений, сохранился у него на всю жизнь.

Тарталья по-итальянски означает заика. Это прозвище было дано маленькому сироте и осталось за ним как его собственное имя. Мало кто помнил его настоящее имя — Фонтана.

Трудно догадаться, какие обстоятельства пробудили у мальчика, лишенного правильного, систематического образования и воспитания, страсть к математике. Может быть, это было врожденным? Мальчика все чаще и чаще стали заставать за занятием, которое, казалось бы, никак не соответствовало ни тому положению, которое он занимал, ни той работе, которую он выполнял.

Склонившись где-нибудь в глубине заброшенного кладбища над запыленной могильной плитой, он мог часами оставаться в глубокой задумчивости и выписывать непонятные для окружающих значки и числа. Элегическая тишина, густо разросшиеся тут и кипарисы, переплетенные пряно пахнущей повиликой, мерное щебетание одинокой пичужки — все это наводило умиротворение и грусть. Сюда не долетал разноголосый рыночный шум, щелканье бичей погонщиков мулов, перебранка пос-

сорившихся соседок на узких, кривых улочках города. Сама жизнь позаботилась о том, чтобы выработать в сироте ту способность к безграничной сосредоточенности, которая является условием всякой серьезной умственной работы.

Вскоре скепсис профанов, вызванный чудаковатыми увлечениями молодого заики, стал все более уступать место удивлению, а порой и невольному восхищению — Тарталья все чаще и чаще оказывался победителем в математических турнирах как со своими сверстниками, так и с людьми, намного старше его. Через некоторое время за ним уже прочно утвердилась слава непревзойденного математика. Не было лишь повода, чтобы о молодом математике заговорила вся страна. Такой повод вскоре представился.

Некто Фиори, житель Болоньи, не добившийся известности ни на одном из поприщ, вдруг обнаружил у себя незаурядное математическое дарование и в 1535 г. объявил, что вызывает на состязание всякого, кто дерзнет противопоставить этому дарованию свое. В чем дело? Откуда такая самоуверенность у человека, дотоле совершенно неизвестного?

Такие вопросы задавал себе Тарталья, когда до него дошел этот вызов. Несколько дней размышлений, сопоставление фактов, и вот уже нарисована более или менее правдоподобная картина, объясняющая смелость невежды. Незадолго до этого умер известный профессор Болонского университета Сципион дель Ферро. Рассказывали, между прочим, что покойный профессор владел секретом решения общего уравнения 3-й степени. Во времена средневековья ученый не спешил делиться секретом, которым он владел, со всеми окружающими. Владение этим секретом ставило его в выгодные условия по отношению к другим. Он мог, например, вызывать на математические (если дело касалось математики) турниры всех желающих и, выходя победителем, приобретать славу непобедимого математика да, кроме того, получать и те призы, которые назначались победителю.

Задача об отыскании общего решения уравнения 3-й степени стояла тогда в центре математической проблематики, и если кто-то уверенно объявлял диспут, то сомнений быть не могло — тот, кто объявлял этот диспут, или полностью решил задачу, или сделал несколько существенных шагов на пути к ее решению. Узнав, что

Фиори был близок к умершему профессору, Тарталья с поразительной и совершенно безошибочной прозорливостью заключил, что Сципион дель Ферро перед смертью сообщил своему знакомому способ решения уравнений 3-й степени.

Молодой математик приложил все старания к тому, чтобы разгадать секрет корня уравнения 3-й степени, и за несколько дней до диспута ему это удалось. Тарталье понадобилось всего два часа, чтобы решить все 30 задач, предложенных ему его противником, в то время как последний не справился ни с одной из задач Тартальи. Способ, найденный Тартальей, оказался намного лучше того, которым владел Фиори, и позволял решать и такие задачи, которые этому малограмотному математику оказывались не под силу. Конечно, это не был самый общий способ, который охватывал единой формулой все возможные частные случаи. Для Тартальи каждый из этих случаев представлял особую трудность, которую он старался преодолеть с помощью особого приема. Однако уже не требовалось больших усилий для того, чтобы перевести полученные результаты на язык современной нам алгебры и усмотреть в выводах математика необходимую общность.

Общее решение уравнений 3-й степени было найдено. Слава о Тарталье — непревзойденном математике — прокатилась по всей Италии и, в частности, достигла ушей всемирно известного врача и астролога Джеронимо Кардано.

Это был удивительный и неповторимый человек, истинное дитя своего времени. Мы его знаем как математика, автора знаменитой книги «Ars magna» («Великое искусство»), в которой содержится и приписываемый ему способ решения уравнения 3-й степени. Сам он, если судить по другой его книге — «О моей жизни», математиком себя не считал, а свое истинное призвание видел в медицине. Ему удалось успешно излечить несколько высокопоставленных особ, в том числе и несколько носителей высокой власти в ряде европейских государств, вследствие чего он стал одним из самых желанных гостей при дворах коронованных особ.

Поскольку средневековая медицина почти все свои положения основывала на астрологических и каббалистических «истинах», то не остался чуждым астрологии и Джеронимо Кардано. О нем, как о выдающемся астро-

логе, слагались легенды, одна из которых, в частности, гласит, что им был составлен гороскоп Христа. Это было расценено как святотатство, и виновнику грозило тяжелое церковное наказание (за подобные проступки в те времена сжигали на кострах). Надо полагать, что лишь заступничество высоких покровителей, пользовавшихся в своих нуждах услугами прославленного врача и мага, спасло его от костра.

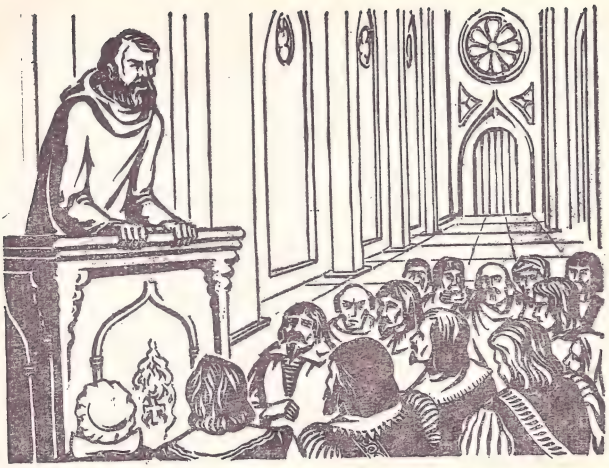
Согласно другой легенде, Кардано составил свой собственный гороскоп, в соответствии с которым предсказал день и час своей смерти. Рассказывают, что в этот именно день и час, снедаемый жаждой не уронить славы великого прорицателя, Кардано лишил себя жизни. Наверно, это уже вымысел, результат не в меру разыгравшегося воображения какого-то сочинителя светских хроник.

Узнав о победе Тартальи, Кардано всеми правдами и неправдами постарался выведать у него его тайну. Долгое время ему это не удавалось — Тарталья еще не сумел извлечь из своего открытия всей возможной выгоды. Однако, в конце концов, последний не сумел устоять против планомерного и хорошо организованного натиска. Постепенно, где полунамеками, где с намеренно сгущенным туманом, Тарталья выдает Кардано свой секрет.

Каково же было негодование заики, когда спустя некоторое время он прочитывает в только что вышедшей книге «Ars magna» (1545 г.) свой способ решения, снабженный, однако, примечанием, что этот способ был сообщен автору его высокочтимым другом Никколо Тартальей из Брешии. В соответствии с представлениями человека средних веков это было равносильно предательству, а приписка, касающаяся приоритета, воспринималась как неприкрытая издевка. Немедленно диспут, немедленно математический поединок, на котором он проучит этого зарвавшегося бессовестного нахала!

Диспут

Площадь перед церковью святой Марии кипела, как потревоженный муравейник. Богато разодетые горожане, нищие в лохмотьях, солдаты с аркебузами — вся эта пестрая, разноликая, горланящая толпа была взволнована одним общим чувством. Взоры большинства были прикованы к еще не открытому порталу. На высоком деревянном щите, прислоненном к одному из двух фонарных столбов, находящихся перед



входом, углем было написано сообщение о том, что в церкви святой богородицы ровно в пять часов начнется диспут между знаменитым Тартальей и прославленным лекарем Кардано.

Диспуты в средние века всегда представляли собой интересное зрелище, привлекавшее праздных горожан от мала до велика. Темы их носили разнообразнейший характер, но обязательно научный. При этом под наукой понимали то, что входило в перечень так называемых семи свободных искусств. Непременной частью этих искусств было, конечно, и богословие. Богословские диспуты были наиболее частыми. Спорили обо всем. Например, о том, приобщится ли мышь к духу святому, если съест причастие, могла ли Кумская сивилла предсказать рождение Иисуса Христа, почему братья и сестры спасителя не причислены к лику святых и т. д.

О споре, который должен был произойти между прославленным математиком и не менее прославленным врачом, высказывались лишь самые общие догадки, так как толком никто ничего не знал. Говорили, что один из них обманул другого (кто именно и кого именно, неизвестно). Почти все те, кто собрался на площади, имели о математике самые смутные представления, но каждый с нетерпением ожидал начала диспута. Это всегда было интересно, всегда можно было потешиться над неудачником, независимо от того, прав он или не прав.

Когда часы на ратуше пробили пять раз, портал ши-

роко распахнулся, и толпа бросилась внутрь собора. По обе стороны от осевой линии, соединяющей вход с алтарем, у двух боковых колонн были воздвигнуты две высокие кафедры, предназначенные для спорщиков. Участников диспута еще не было. Присутствующие громко шумели, не обращая никакого внимания на то, что находились в церкви.

Наконец перед железной решеткой, отделявшей иконостас от остальной части центрального нефа, появился городской глашатай в черно-фиолетовом плаще и зычным голосом провозгласил:

«Достославные ломбардцы, граждане богоспасаемого города Милана! Сейчас перед вами выступит знаменитый математик Никколо Тарталья из Брешии. Его противником в диспуте должен был быть математик и врач Джеронимо Кардано. Никколо Тарталья обвиняет Кардано в том, что последний в своей книге «Ars magna» опубликовал способ решения уравнения 3-й степени, принадлежащий ему, Тарталье. Однако сам Кардано на сегодняшний диспут прийти не смог и прислал вместо себя своего ученика Луиджи Феррари. Итак, диспут объявляется открытым, участники его приглашаются на кафедры».

На левую от входа кафедру поднялся неловкий человек с горбатым носом и курчавой, кое-где тронутой проседью бородой. Левую щеку его перерезал шрам, один из концов которого прятался где-то на подбородке. У подножия остался его спутник, очень на него похожий, но чуть более высокий и чуть более спокойный в движениях.

На противоположную кафедру ленивой походкой взошел молодой человек двадцати с небольшим лет, с красивым самоуверенным лицом и покрытыми томной поволокой глазами. Во всей его манере держаться сказывалась полная уверенность в том, что каждый его жест и каждое его слово будут приняты с восторгом. Эта уверенность подкреплялась тем, что его кафедра была окружена плотным кольцом его многочисленных друзей и родичей, готовых при случае поддержать его аргументацию действиями, более энергичными, чем словесные хитросплетения. Скользнув по ним взглядом, Феррари остановил свой взор на своем бородатом, непривлекательном противнике.

Начал Тарталья.

— Уважаемые господа, жители города Милана,— голос его был хриплым и негромким, ему с трудом уда-

валось преодолевать заикание.— Уважаемые граждане Милана, вам известно, что 13 лет назад мне удалось найти способ решения уравнения 3-й степени и тогда я, пользуясь этим способом, одержал победу в диспуте с Фиори. Мой способ привлек внимание вашего согражданина Кардано, и он, Кардано, приложил все свое хитроумное искусство, чтобы выведать у меня секрет. Он не остановился ни перед обманом, ни перед прямым подлогом. Вы знаете также, что три года назад в Нюрнберге вышла книга Кардано о правилах алгебры, где мой способ, так бессовестно у меня выкраденный, был сделан достоянием каждого.

Тарталья остановился, чтобы перевести дух. На лицах присутствующих он прочитал если не недоверие, то, что было еще хуже, явно насмешливое сочувствие к себе. Это еще более смутило его, и он стал заикаться гораздо более мучительно, чем в начале своего выступления.

— Я вызвал Кардано и его ученика, которого вы видите сейчас перед собой, на состязание. Я предложил решить 31 задачу, столько же было предложено и мне моими противниками. Был определен срок для решения задач — 15 дней. Мне удалось за 7 дней решить большую часть тех задач, которые были составлены Кардано и Феррари. Я напечатал их и послал с курьером в Милан. Однако мне пришлось ждать целых пять месяцев, пока я получил ответы к своим задачам. И само по себе это было бы нарушением условия состязания, но я снисхожу к недостаточности математических знаний у моих противников и готов даже отказаться от этих условий, не рискуя остаться в проигрыше — задачи, присланные мне, решены неправильно. Это и дало мне основание вызвать обоих на публичный диспут, на котором вы, уважаемые граждане Милана, имеете честь присутствовать.

Тарталья замолчал и, вынув из-за широкого обшлага цветной фуляровый платок, дрожащей рукой вытер вспотевший лоб.

Молодой человек, сделав театральный жест правой рукой и со снисходительным высокомерием посмотрев на несчастного Тарталью, откинул назад гордо поднятую голову и произнес хорошо поставленным грассирующим баритоном:

— Уважаемые господа! Мой досточтимый противник позволил себе в первых же словах своего выступления высказать столько клеветы в мой адрес и в адрес моего

учителя, его аргументация была столь голословной и непоследовательной, что мне едва ли доставит какой-либо труд опровергнуть первое и показать вам несостоятельность второго.

— Прежде всего, о каком обмане может идти речь, если Никколо Тарталья совершенно добровольно поделился своим способом с нами обоими? Вместе с тем, в тех случаях, когда полной откровенности с его стороны не было и когда он пытался ввести нас в заблуждение, зашифровав математическое правило в туманных и невразумительных стихах, то кто же станет отрицать, что человек, усмотревший за этой невразумительной тарабарщиной истину, является автором открытия в такой же мере, как и тот, кто пришел к этому открытию, не имея ни стихов, ни иных намеков на него?

— Мой противник проявил к тому же изрядную долю неблагодарности, видя в нас лишь бессовестных воров, однако в книге «Великое искусство» мой учитель, совершенно не думая о своих собственных интересах, целиком приписал Тарталье честь открытия, на которое он сам имеет ничуть не меньшее право претендовать.

Феррари, засунув руку за пазуху, вытащил небольшую книжку, и, раскрыв ее, сказал:

— Вот как пишет Джеронимо Кардано о роли моего противника в открытии алгебраического правила. Он говорит, что не ему, Кардано,— Феррари повысил голос, давая понять тем самым, что дальнейшие слова он цитирует по книге,— «а моему другу Тарталье принадлежит честь открытия такого прекрасного и удивительного, превосходящего человеческое остроумие и все таланты человеческого духа. Это открытие есть поистине небесный дар, такое прекрасное доказательство силы ума, его постигнувшего, что уже ничто не может считаться для него недостижимым».

Тем же театральным жестом Феррари откинул со лба красивые вьющиеся волосы и продолжал:

— Мой противник, как вы все изволили слышать, обвинил меня и моего учителя в том, что мы будто бы дали неверное решение его задач. Мне хотелось бы, чтобы сеньор Тарталья объяснил, что это значит — неверное решение. Как может быть неверным корень уравнения, если, подставляя его в уравнение и выполняя все предписанные в этом уравнении действия, мы приходим к тождеству? И уж если сеньор Тарталья хочет быть

совершенно последовательным, то он должен был бы ответить на замечание, почему мы, укравшие, по его словам, его изобретение и использовавшие это изобретение для решения предложенных им задач, получили неверный результат.

— Значит, одно из двух — или результаты действительно не верны и тогда изобретение сеньора Тартальи — вовсе не изобретение, или они, эти результаты, верны.

Шум прошелся по рядам присутствующих. Слушатели стали оживленно переговариваться и бросать подбадривающие взгляды в сторону молодого человека и насмешливо-иронические — в сторону его неимпозантного противника.

Феррари продолжал:

— Мы — мой учитель и я — не считаем, однако, изобретение сеньора Тартальи маловажным. Это изобретение замечательно. Более того, я, опираясь в значительной мере на него, нашел способ решения уравнения 4-й степени, и в «Ars magna» мой учитель говорит об этом.

Феррари выразительным жестом указал на раскрытую книгу.

— Чего же хочет от нас сеньор Тарталья? Чего добивается он диспутом?

Шум в церкви усилился. С трудом герольду, повысившему свой мощный голос, удалось несколько умерить его.

— Господа, господа,— Тарталья не мог подыскать подходящих слов,— я прошу вас выслушать меня. Я не отрицаю того, что мой молодой противник очень силен в логике и красноречии. Но нельзя этой логикой и этим красноречием, апеллирующими скорее к чувствам, чем к разуму, заменить истинное математическое доказательство. Задачи, которые я дал Кардано и Феррари, решены неправильно, и я вам докажу это. Действительно, возьмем, например, уравнение из числа решавшихся. Оно, как известно...

В церкви поднялся невообразимый шум, поглотивший полностью окончание фразы, начатой незадачливым математиком. Больше всего шумели друзья Феррари. Из разноголосых выкриков, которые долетали до слуха Тартальи, он понял, что присутствующие требовали выбрать судей, которые были бы компетентны в математике и которые могли бы сказать, насколько прав Тарталья в своих возражениях.

— Господа,— напрягая последние силы, закричал Тарталья,— ни с каким выбором судей здесь, в Милане, я не согласен. Я никого здесь не знаю и заранее могу быть уверенным в том, что судейство будет предвзятым и необъективным.

Ему не дали продолжать. Толпа, зажигаясь все более и более, требовала от него, чтобы он замолчал и чтобы очередь была предоставлена Феррари.

Тарталья вынужден был отступить.

Получив слово, Феррари повел себя так, как если бы был не на диспуте, а в университетской аудитории. Он начал с азов механики и математики, внимательнейшим образом проанализировал труды Архимеда и Авиценны, он связал математические истины с истинами священного писания и, увлекшись сам и увлекая за собой других, настолько отошел от предмета спора, что никто из присутствующих, исключая разве лишь Тарталью, толком и не знал, о чем в действительности идет спор.

Распаленная толпа бурными возгласами приветствовала окончание каждого периода в выступлении своего любимца. По адресу Тартальи неслись уже угрозы, и можно было догадаться, что лишь присутствие в святом месте удерживало наиболее рьяных сторонников Феррари от желания немедленно расправиться с заикой, дерзнувшим тут, в Милане, подвергнуть сомнению ученость двух наиболее почитаемых граждан.

Посмотрев на своего брата, стоявшего внизу и делавшего ему отчаянные знаки, видя, что продолжение спора совершенно бесполезно, Тарталья поспешно спустился с кафедры. Вдвоем они быстро прошли через неохотно расступавшуюся перед ними толпу и вышли через северный притвор на площадь. Сзади них бурными выкриками и хлопками толпа приветствовала «победителя» диспута Луиджи Феррари, «розового юношу с нежным голосом, веселым лицом, громадными способностями и характером дьявола», как писали о нем его современники.

Так закончился этот спор, который и сейчас, спустя 400 с лишним лет, продолжает вызывать все новые и новые споры. Кто был прав в том, первом споре, состоявшемся в 1548 г.? Кому в действительности принадлежит способ решения уравнения 3-й степени? Мы говорим сейчас — Никколо Тарталье. Он открыл, а Кардано выманил у него это открытие. И если сейчас мы называем

формулу, представляющую корни уравнения 3-й степени через его коэффициенты, формулой Кардано, то это-де историческая несправедливость.

Однако несправедливость ли? Как подсчитать меру участия в открытии каждого из математиков?

Может быть, со временем мы сможем ответить на этот вопрос совершенно точно. А может быть, это навсегда останется тайной...

Формула Кардано

Если воспользоваться современным математическим языком и современной символикой, то вывод формулы Кардано может быть найден с помощью следующих, в высшей степени элементарных, соображений.

Пусть нам дано общее уравнение 3-й степени:

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0. \tag{27}$$

Если положить

$$x = y - \frac{b}{a},$$

то мы приведем уравнение (27) к виду

$$y^3 + 3py + 2q = 0, \tag{28}$$

где

$$p = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{a^2}, \quad 2q = 2\frac{b^3}{a^3} - 3\frac{bc}{a^2} + \frac{d}{a}.$$

Введем новое неизвестное u с помощью равенства

$$y = u - \frac{p}{u}.$$

Внося это выражение в (28), получим

$$(u^3)^2 + 2qu^3 - p^3 = 0. \tag{29}$$

Отсюда

$$u^3 = -q \pm \sqrt{q^2 + p^3},$$

следовательно,

$$y = \sqrt[3]{-q \pm \sqrt{q^2 + p^3}} - \frac{p}{\sqrt[3]{-q \pm \sqrt{q^2 + p^3}}}.$$

Если числитель и знаменатель второго слагаемого умножить на выражение

$$\sqrt[3]{-q \mp \sqrt{g^2 + p^3}}$$

и учесть, что получающееся в результате выражение для u оказывается симметричным относительно знаков «+» и «—», то окончательно получим

$$y = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}}\,.$$

(Произведение кубических радикалов в последнем равенстве должно равняться p).

Это и есть знаменитая формула Кардано. Если перейти от y вновь к x, то получим формулу, определяющую корень общего уравнения 3-й степени.

Молодой человек, так безжалостно обошедшийся с Тартальей, оказался способным не только к тому, чтобы произносить длинные и туманные речи. В математике он разбирался столь же легко, как и в нравах неприхотливой толпы. Прошло совсем немного времени с того момента, как Феррари узнал об общем способе решения уравнения 3-й степени, и он находит способ решения уравнения также и 4-й степени. Кардано поместил этот способ в свою книгу, как об этом заявил Феррари в своем споре с Тартальей.

Что же представляет собой этот способ?

Мы видели выше, что с помощью совсем несложной подстановки кубическое уравнение (28) можно привести к квадратному уравнению (29) относительно u^3. Совершенно естественно, что теперь Феррари ищет возможности привести общее уравнение 4-й степени к некоторому кубическому уравнению. Пусть

$$ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0 \qquad (30)$$

— общее уравнение 4-й степени. Если положить

$$x = y - \frac{b}{a}\,,$$

то уравнение (30) можно привести к виду

$$y^4 + 2py^2 + 2qy + r = 0, \qquad (31)$$

где p, q, r — некоторые коэффициенты, зависящие от a, b, c, d, e. Легко видеть, что это уравнение можно записать в таком виде:

$$(y^2 + p + t)^2 = 2ty^2 - 2qy + t^2 + 2pt + p^2 - r. \qquad (32)$$

В самом деле, достаточно раскрыть скобки, тогда все члены, содержащие t, взаимно уничтожатся, и мы возвратимся к уравнению (31).

Выберем параметр t так, чтобы правая часть уравнения (32) была полным квадратом относительно y. Как известно, необходимым и достаточным условием этого является обращение в нуль дискриминанта из коэффициентов трехчлена (относительно y), стоящего справа:

$$q^2 - 2t(t^2 + 2pt + p^2 - r) = 0. \qquad (33)$$

Получили это полное кубическое уравнение, которое мы уже можем решить. Найдем какой-либо его корень и внесем его в уравнение (32), которое теперь примет вид

$$(y^2 + p + t)^2 = 2t\left(y - \frac{q}{2t}\right)^2.$$

Отсюда

$$y^2 \mp \sqrt{2t}\, y + p + t \pm \frac{q}{\sqrt{2t}} = 0.$$

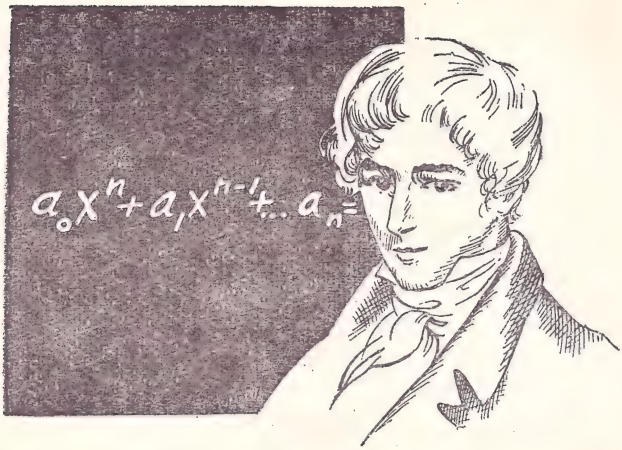
Это квадратное уравнение. Решая его, можно найти корень уравнения (31), а следовательно, и (30).

Все оказывается очень простым, а между тем сколько драматических, а порой и комических событий сопутствовали этому открытию. Однако каковы бы ни были эти события, они всегда останутся в нашей памяти как события, окруженные ореолом высокой романтики. Это была романтика поиска, романтика научного подвига.

Уравнения 3-й и 4-й степени были решены. Корни таких уравнений, как и корни уравнений 1-й и 2-й степени, оказалось возможным выразить через коэффициенты этих уравнений с помощью конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень и извлечения корней соответствующей степени. Однако, вероятно, каждому показалось бы немыслимым курьезом, если бы кто-нибудь решил, что уравнения выше 4-й степени не представляют интереса. Математик не был бы математиком, если бы, решив наконец проблему корней уравнений 3-й и 4-й степени, не захотел узнать, как решаются уравнения 5-й, 6-й и более высоких степеней.

Творческий процесс в математике сродни любому другому творческому процессу. Когда писатель начинает работать над художественным произведением, он часто лишь смутно представляет себе, как сложатся судьбы его героев. Но вот герои зажили собственной жизнью, и писатель, несмотря на все свое желание, не в силах помешать им, не в силах изменить эту жизнь.

То же и в математике. Взявшись за решение какой-



либо задачи, математик-творец в известном смысле уже не властен над собой. Математика начинает вести его за собой, она сама ставит перед ним тысячи проблем, которые, тесно переплетаясь друг с другом, увеличиваются в числе с быстротой катящегося с горы снежного кома. Не следует думать, что такая математика оторвана от реальной жизни. Сама она является порождением этой жизни, и если математика ведет за собой исследователя, то это означает, что ведет его за собой сама жизнь.

Памятник в королевском парке

В королевском парке в Осло высится памятник. На пьедестале, представляющем собой грубо отесанный параллелепипед, статуя молодого обнаженного, атлетически сложенного человека, попирающего обеими ногами две поверженные фигуры. Это — Абель. Что означают поверженные фигуры, знал, вероятно, лишь скульптор, изваявший их. Что же касается тех, кому доводилось видеть памятник, то каждый, очевидно, по-своему толковал смысл и значение фигур. Может быть, это две наиболее важные проблемы, решенные Абелем — теория эллиптических функций и проблема решения алгебраических уравнений в радикалах? А может быть, это два наиболее коварных врага человека, побежденных молодым гением,— смерть и забвение? Абель одолел и первого, и второго врага, обретя бессмертие в памяти грядущих поколений своими выдающимися открытиями.

Впрочем, богатая фантазия автора монумента может поставить в тупик не только неясным смыслом обеих низвергнутых фигур. Атлет, восседающий на пьедестале, лишь при очень живом воображении может быть уподоблен Абелю. Нет, не был Абель атлетом. И не было в его облике той непреклонной решимости, которая давала бы ему возможность преодолевать любые препятствия. На единственном дошедшем до нас портрете математика, сделанном во время его пребывания в Париже, мы видим очень милого, застенчивого юношу с располагающей к себе улыбкой и легкой копной мягких пепельно-серых волос. Тяжелая болезнь (пневмония и скрытая форма туберкулеза) подточили и без того непрочное здоровье математика. Он умер в 26 лет 6 апреля 1829 г.

Поля, группы, расширения

Об одних открытиях Абеля, например тех, что связаны с эллиптическими функциями и эллиптическими интегралами, говорить трудно — слишком много понадобилось бы определений и пояснений для того, чтобы основная суть его результатов могла быть изложена убедительно. О других, связанных с доказательством невозможности решения в радикалах общего уравнения выше 4-й степени, попытаемся рассказать, но лишь в самых общих чертах.

Пусть дано общее алгебраическое уравнение, степень которого больше четырех:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0, \quad n \geqslant 5. \qquad (34)$$

Как показал К. Ф. Гаусс, выдающийся немецкий математик XVIII—XIX ст., это уравнение имеет n корней, которые могут быть действительными, мнимыми, совпадающими или различными.

Предполагая, что корни уравнения (34) различны, мы должны считать совершенно произвольными и его коэффициенты.

Назовем *полем* такое множество P чисел, которое обладает следующими свойствами:

1) если $a \in P$ и $b \in P$, то $a + b \in P$ и $ab \in P$;

2) если $a \in P$, то $-a \in P$ и $a^{-1} \in P$ (при $a \neq 0$).

Пусть P — некоторое поле. Извлечем из всех чисел этого поля квадратные корни, присоединим к полю все такие корни, а также все те числа, которые получаются

из расширенного таким образом множества путем многократного использования операций сложения, вычитания, умножения и деления (исключая деление на нуль).

Получим новое поле, которое называется *радикальным расширением* поля P. Аналогично можно получить радикальное расширение, если брать кубические корни (радикалы), корни (радикалы) четвертого порядка и т. д.

Рассмотрим уравнение (34), коэффициенты которого принадлежат полю P. Пусть это уравнение имеет корень, который выражается в радикалах. Это означает, что такой корень принадлежит полю, получающемуся из поля P в результате последовательности радикальных расширений, причем каждое последующее расширение получается из поля, к которому приходят в результате предыдущих расширений. Рассматривая эти поля, обнаруживаем их связь с такими очень важными понятиями современной алгебры, как понятия группы, ее нормального делителя и фактор-группы.

Пусть имеем совокупность Ω элементов произвольной природы $a, b, c, \ldots$, где с каждой парой элементов $a, b,$ взятых в определенном порядке, связывается некоторый элемент, который назовем *произведением* элементов a, b и обозначим ab. В общем случае $ab \neq ba$.

Совокупность Ω называется *группой* тогда и только тогда, когда выполнены следующие четыре условия (аксиомы группы):

1. Произведение двух элементов совокупности Ω принадлежит этой же совокупности: $ab = c$.

2. Справедлив ассоциативный закон: $(ab)\,c = a\,(bc)$.

3. К числу элементов совокупности принадлежит единица группы, т. е. такой элемент e, что для каждого элемента совокупности a справедливо равенство $ae = a$.

4. Для каждого элемента $a \in \Omega$ существует элемент $a^{-1} \in \Omega$ (обратный элемент), такой, что $aa^{-1} = e$.

Если для каждой пары элементов a, b группы выполняется равенство $ab = ba$, то группа называется *коммутативной, или абелевой.*

Если часть элементов группы в свою очередь является группой с той же операцией умножения, то эта часть называется *подгруппой* данной группы.

Группа называется *циклической*, если каждый элемент ее является последовательной степенью, т. е. произведе-

нием самого на себя соответствующее число раз, какого-либо одного ее элемента (образующего).

Пусть G — группа и H — некоторая ее подгруппа. Пусть $g \in G$ — некоторый фиксированный элемент и $h \in H$ — произвольный элемент подгруппы. Совокупность всех элементов вида gh, где g фиксировано, а h пробегает всю подгруппу, называется *левым классом смежности* по подгруппе H. Обозначим его через gH. Аналогично можно получить правый класс смежности Hg как совокупность элементов вида hg. В общем случае левый и правый классы не совпадают друг с другом, $gH \neq Hg$. Если же для любого g справедливо равенство $gH = Hg$ (хотя, вообще говоря, $gh \neq hg$), то подгруппа H называется *нормальным делителем* группы G.

Если перемножить два класса смежности (т. е. перемножить все их элементы), то получается класс смежности. При этом выполняются все групповые аксиомы, роль единицы группы играет сам нормальный делитель. Получается новая группа, элементами которой являются классы смежности. Эта группа называется *фактор-группой* группы G по нормальному делителю H и обозначается символом G/H.

Легко понять, что каждое поле является группой, в которой операцией умножения является обычное умножение чисел поля. Группой является и радикальное расширение поля. Из числа элементов поля должен быть исключен нуль.

Если алгебраическое уравнение решается в радикалах, то существует последовательность радикальных расширений, а потому и последовательность подгрупп, начиная с группы G, т. е. с самого последнего радикального расширения, и кончая единицей группы, т. е. в данном случае полем P:

$$G, H_1, H_2, \ldots$$

Введем теперь важное понятие группы Галуа. Пусть имеется некоторое радикальное расширение K поля P. Рассмотрим всевозможные *автоморфизмы* поля K, т. е. такие отображения элементов поля в элементы этого же поля, при котором сумма двух элементов переходит в сумму, а произведение — в произведение. Если при этом элементы поля P переходят сами в себя, то автоморфизмы называются *автоморфизмами над полем* P. Совокупность всех автоморфизмов является группой, ко-

торая и называется *группой Галуа поля K над полем P*. Она обозначается символом $G(K, P)$.

Группа Галуа переводит каждый корень уравнения, разрешимого в радикалах, в корень этого же уравнения. Если корни уравнения различны (следовательно, коэффициенты уравнения (34) произвольны), то преобразование, которое совокупность из n корней переводит в эту же совокупность, называется *подстановкой*. Считая корни пронумерованными, такую подстановку можно обозначить символом

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix},$$

где $i_1, \dots, i_n$ — те же натуральные числа $1, \dots, n$, но взятые, вообще говоря, в каком-то ином порядке. Совокупность всех подстановок из n элементов является группой, которая называется *симметрической*. Число элементов в ней равно $n!$.

Пусть имеется последовательность радикальных расширений поля P:

$$P = L_0 \subset L_1 \subset \dots \subset L_{i-1} \subset L_i \subset \dots \subset L_s = K, \quad (35)$$

где символ $\subset$ означает включение, т. е. в данном случае то, что каждое поле является подполем последующего поля. Каждое поле является радикальным расширением предыдущего поля.

С каждым подполем свяжем группу Галуа:

$$H_i = G(K, L_i).$$

В таком случае ряду подполей (35) будет соответствовать ряд подгрупп:

$$G(K, P) = H_0 \supset H_1 \supset \dots \supset H_{i-1} \supset H_i \supset \dots \supset H_s = e. \quad (36)$$

Символ $\supset$ означает, что каждая группа является подгруппой предыдущей. Более того, в данном случае эта подгруппа является нормальным делителем предыдущей группы, а каждая фактор-группа H_{i-1}/H_i является циклической.

При наличии цепочки (36) говорят, что группа $G(K, P)$ *разрешима*. Если цепочка (36) возможна лишь при $s = 1$, то группа называется *простой*, или *неразрешимой*.

Итак, если алгебраическое уравнение разрешимо в радикалах, то соответствующая ему группа Галуа разрешима. Справедливо и обратное: если группа Галуа разрешима, то алгебраическое уравнение с этой группой разрешимо в радикалах.

Для доказательства невозможности решения общего алгебраического уравнения в радикалах достаточно убедиться в том, что соответствующая уравнению группа Галуа неразрешима. При этом, поскольку уравнение общее, т. е. его коэффициенты произвольны, то вместо группы Галуа можно взять соответствующую группу подстановок из n элементов, где n — степень уравнения.

При $n \leqslant 4$ каждая группа подстановок разрешима, а это означает, что алгебраические уравнения степени не выше 4-й разрешимы в радикалах. Их решения, как известно, были найдены в результате долгих поисков. Существуют и иные способы отыскания этих решений — с помощью построения так называемых *резольвент Лагранжа*, однако здесь описывать этого не станем.

При $n \geqslant 5$ группы подстановок оказываются неразрешимыми, а это означает, что общие алгебраические уравнения выше 4-й степени в радикалах не решаются.

Эта теорема была доказана Абелем в то время, когда ему было всего около 22 лет. Однако схема его рассуждений была отличной от той, которую мы только что воспроизвели и которая целиком вписывается в созданную некоторое время спустя теорию Галуа. Идея Абеля заключалась в том, чтобы доказать невозможность обращения в тождество уравнения выше 4-й степени, если вместо неизвестного в него подставить выражение, составленное из коэффициентов с помощью операций сложения, умножения, вычитания, деления и извлечения корней.

Рассуждения Абеля не отличались той общностью, которая была присуща теории Галуа. Опираясь на эту общность, Галуа сумел не только повторить результат Абеля, но и пойти намного дальше его. Теорема Абеля оказалась в известном смысле побочным результатом в исследованиях Галуа. Теория Галуа позволила доказать не только неразрешимость в радикалах общего уравнения выше 4-й степени, но и указать условия такой разрешимости для уравнений, не являющихся общими.

Надо ли говорить, что создание теории Галуа — не

последнее слово в математике. Эта теория породила множество других задач, над решением которых математики работают и в наше время. О значении их работ может свидетельствовать то, что за некоторые из них были присуждены самые высокие премии в нашей стране.

Дремлющие силы

Но как бы далеко ни шагнула вперед математика, благодарная человеческая память навсегда сохранит воспоминания о двух прекрасных юношах — Абеле и Галуа, чья трагическая судьба будет всегда будить самое живое и искреннее сочувствие, а могучий и светлый ум — самое глубокое восхищение.

Великие силы заложены в человеческом уме. Велики и те силы, которые дают возможность представить мир в виде математически организованной системы. Способность математически мыслить присуща каждому человеку, но у одного она может быть большей, у другого меньшей. Эта способность часто представляет собой дремлющую силу, которую надо уметь разбудить. И тогда она будет творить чудеса.

Рассказывают, что однажды спартанцы, теснимые врагами, изнемогали в жестокой, неравной борьбе. Силы таяли с каждым днем, сопротивление ослабевало, казалось, еще немного — и все будет кончено: торжествующий враг ворвется в лагерь, и последние его защитники падут на омытую кровью священную землю своих предков.

Когда надежды на спасение не было никакой, вспомнили осажденные о своих братьях по крови афинянах. Афины и Лакедемон часто ссорились, часто не могли найти общего языка. Но не время ли забыть распри перед лицом опасного и коварного врага? Падет Лакедемон — падут и Афины, и навсегда отойдет в область предания славная Эллада.

Ночью бесстрашный воин ужом прополз сквозь вражеские заграждения, летучей мышью перелетел над глубокими рвами, нимфой-дриадой проплыл через быстрые горные речки и утром был у афинян.

Но какая же горечь наполнила сердца спартанцев, когда вместо ожидаемой когорты сильных и здоровых воинов они увидели хромого тщедушного старика. Поначалу решили, что это злая и неумная шутка.

Однако это не было шуткой. Посланным оказался замечательный поэт Тиртей, от слов которого загорались

сердца у всех, кто его слушал. Так случилось и сейчас. Слово поэта разбудило дремлющие силы спартанцев. Оно исполнило неукротимой отвагой мускулы воинов, воспламенило их души. Это уже не были сломленные неудачами страдальцы. Казалось, что фаланга сошедших с небес богов предстала перед вдохновенным трибуном. С удесятеренной энергией бросились воины на врага и вытеснили его за пределы родной земли...

Такова сила слова. Такие же великие духовные силы способна пробудить в человеке и математическая проблема, четко поставленная и математически захватывающая. Одной из таких проблем оказалась та, о которой мы рассказали в нашей книжке — проблема решения великих задач. Началась она, казалось бы, с пустяка, а привела к результатам, которые составляют славу и гордость нашей математики. Пустяковость ее оказалась мнимой, в действительности же это была проблема необычайно трудная, а потому и необычайно перспективная и привлекательная...

Дерзать, дерзать...

Дорогие друзья! Беритесь за решение трудных математических задач! И тех, которые только что поставлены, и тех, которые уже многие десятилетия или столетия не поддаются решению. Вы испытаете муки творчества, вы будете разочарованы, когда вам будет казаться, что вы напрасно потратили годы на поиски ускользающего призрака. Все может быть. Но вы будете сторицей вознаграждены, когда в один прекрасный день окажетесь перед той заветной целью, к которой так долго и так трудно шли. Не будьте безучастными и равнодушными, иначе вас ожидает духовная смерть.

На первых страницах нашей книжки приведены слова Данте о беспредельной жажде познания, с которой должен жить человек. Вот еще один отрывок из того же «Ада» Данте. Вы помните, как Данте, ведомый древнеримским поэтом Вергилием, вдруг слышит стоны многих душ и просит своего проводника объяснить ему, чьи это стоны и какова вина стонущих:

И я с главою, ужасом склоненной,
«Чей это стон? — едва спросить посмел,
— Какой толпы, страданьем побежденной?»
И вождь в ответ: «То — горестный удел
Тех жалких душ, что прожили, не зная

Ни славы, ни позора смертных дел.
От них и суд, и правда отошли.
И эта жизнь настолько нестерпима,
Что все другое было б легче им.
Они не стоят слов. Взгляни — и мимо».

Взгляни — и мимо!

А вот, к примеру, три эпизода, мимо которых никак нельзя пройти равнодушными. Мы взяли их наугад из истории математики, густо насыщенной такими эпизодами — героическими и драматическими, исполненными высокого пафоса и гражданского мужества, а нередко забавными и курьезными...

— Вот она, хватайте ее! — архиепископ Кирилл властным жестом указал на паланкин, в котором возлежала молодая, красивая женщина.

Толпа, окружавшая архиепископа, с диким ревом бросилась на паланкин. Четверо рослых нубийцев — носильщиков были вмиг опрокинуты и десятки грязных, грубых рук протянулись к женщине.

— Сюда ее, сюда!— продолжал неистовствовать Кирилл.— Тащи ее, проклятую чернокнижницу и язычницу!

Гипатия тщетно пыталась прикрыть свою голову от ударов обезумевших христиан. Схватив ее за волосы, звероподобный фракиец растолкал ударами своей сокрушающей руки толпу и поволок несчастную женщину к тому месту, где стоял Кирилл. Бросив ее перед архиепис-

копом, он стал рядом с ней, широко расставив ноги и скрестив на груди руки, готовый уничтожить каждого, кто посмел бы прийти ей на помощь.

— Братья мои во Христе! — зычным голосом закричал Кирилл, стараясь перекрыть им шум возбужденной толпы.— Возлюбленные братья мои! Эта мерзкая язычница не признала учения нашего божественного учителя. Много лет проповедует она богопротивные догматы математики и философии, много лет льет она ядовитое зелье в дело нашей святой христианской церкви! Пришла пора рассчитаться с нечестивицей! Убить исчадие геенны! Очистить наш богоспасаемый город от скверны греха и словоблудия!

Звериный рев потряс площадь. Оборванные, грязные, десятки лет не мытые и не чесаные пустынники, утратившие во славу Христа человеческий разум, ринулись на женщину...

Это случилось в Александрии в 415 г. Гипатия Александрийская была первой известной нам женщиной-математиком. Она была растерзана толпой фанатиков-христиан по наущению архиепископа Кирилла за то, что, не убоявшись угроз, продолжала преподавать в Александрийском музее философию и математику, одновременно комментируя труды своих великих предшественников.

...Работа была трудной, даже для него, привыкшего считать безделками то, перед чем другие в бессилии опускали руки. Цифры, цифры, цифры... Колонки цифр, страницы цифр, стопки исписанных страниц. Выкладки и еще выкладки...

Стенные часы пробили половину третьего. Их удар, раздавшийся в ночной тиши, заставил вздрогнуть так же, как и выстрел крепостной пушки в полдень. Эйлер встал из-за стола. Комната была погружена во мрак. Свет единственной свечи, стоявшей на столе и заботливо прикрытой абажуром, освещал лишь небольшой заваленный бумагами круг.

Несколько шагов по мягкому ковру, несколько взмахов руками. Ломило грудь, ныла поясница, несколько раз мучительно резко потянуло в глазу. Откуда такие немощи? Это в двадцать-то восемь лет!

На какой-то миг пронзительно захотелось бросить все и залечь сурком в теплую мягкую постель. И отоспаться за все долгие-долгие бессонные ночи. Но это невозможно.

Смешно говорить о честолюбии, но именно оно явилось причиной этой изнурительной спешки. Честь, его честь, честь ученого, поставлена на карту. Надо за трое суток выполнить важное правительственное задание, выполнить во что бы то ни стало. Трудно сказать, почему он так опрометчиво дал это обязательство. Просили же другие несколько месяцев!

Работа и вправду оказалась трудной. Но этим она и взяла его, истинного раба своих страстей. Чем труднее, тем заманчивее. Это вызов уму, человеческому уму, а вызов должен быть принят, брошенная перчатка должна быть поднята. Иначе ты окажешься трусом, умственным трусом, что едва ли не хуже, чем быть трусом в поединке по поводу оскорбленной чести.

Математик перчатку поднял. Работа была трудной, но она была и чрезвычайно захватывающей, настолько захватывающей, что математик, забывая о сне и еде, весь отдавался во власть чарующей гармонии строгих и последовательных зависимостей.

Эйлер потер глаз ладонью. Боль, кажется, немножко утихла.

И снова цифры, формулы, цифры... Эйлер размышляет. Это — его жизнь. Без наслаждения музыкой математики она не имела бы смысла. Как хорошо сказал кто-то из старых геометров — жизнь хороша тем, что в ней можно заниматься математикой. Как бы порой и ни хотелось бросить все и не думать о гвоздем засевших в голове вопросах...

Работа была окончена в срок. Но оставила после себя страшный, чудовищный след — глаз, его правый глаз, так мучительно нывший в последнее время, не выдержал сверхчеловеческого напряжения и вытек. Но математик не перестал вычислять. А когда вычислять стало уже нельзя, прекратилась и жизнь. После его смерти сказали так: Эйлер перестал вычислять и жить. Именно так — вычислять, а поэтому и жить.

Это был один из величайших математиков всех времен. Родился он в самом начале XVIII ст. в Швейцарии, но почти половину своей долгой жизни прожил в России. Здесь он умер, здесь и покоится его прах. Мы по праву называем Эйлера отечественным математиком.

...Шум в зале не утихал. Говорили одновременно почти все присутствующие. На лицах многих написано выражение, которое бывает у человека, когда он обна-

руживает, что его вдруг, неожиданно завлекли в ловушку.

С трудом сдерживая волнение, Лобачевский пристально вглядывался в зал, пытаясь по долетавшим до него репликам догадаться, чего именно не поняли его слушатели. Разве он не был предельно корректен в своих умозаключениях? Разве в чем-нибудь он погрешил против истины и здравого смысла? Две тысячи лет люди безуспешно пытались найти доказательство евклидова постулата. Две тысячи лет оставалась не решенной проблема, явившаяся истинным вызовом человеческому разуму. Он решил эту проблему, решил, построив новую геометрию. Евклидов постулат не есть следствие других аксиом и постулатов, содержащихся в евклидовых «Началах». Есть ли основания к тому, чтобы не принимать новую геометрию, столь же законную и логически безупречную, как и геометрия Евклида?

11 февраля 1826 г., когда Лобачевский сделал свой доклад в Казанском университете, его не поняли. А не поняв, не написали ни отзыва, ни комментариев к его докладу.

«Отзыв» появился спустя несколько лет. Не о докладе, а о мемуаре, который назывался «О началах геометрии». О, что это был за отзыв! Не отзыв, а пасквиль торжествующего невежды. До сих пор не знают, кто был этим невеждой. Пасквиль был напечатан в петербургском журнале «Сын отечества», и под ним вместо подписи стояли лишь две буквы «С.С.»

Вот, в частности, что содержалось в «отзыве»:

«Как можно подумать, чтобы г. Лобачевский, ординарный профессор математики, написал с какою-нибудь серьезной целью книгу, которая не много принесла бы чести и последнему приходскому учителю? Если не ученость, то, по крайней мере, здравый смысл должен иметь каждый учитель, а в новой геометрии нередко недостает и сего последнего...»

Прочитав журнал, Лобачевский с силой отшвырнул его от себя. Бездарность! Математическая бездарность! Только проторенными дорожками, только в броне из высказываний авторитетов мыслят они себе путь в науку! В каждом отступлении от шаблона, в каждой свежей, не банальной мысли видят неслыханное святотатство!..

Как, однако, тесен его профессиональный кабинет!

Прежде он казался таким обширным. Несколько шагов по диагонали, столько же в обратном направлении. Несколько шагов вперед, столько же назад... О Евклид! Знал ли ты подобное? Наверно, знал, иначе не был бы ученым. Взять, взять себя в руки! Наука — не для слабонервных. Поистине,

Здесь надо, чтоб душа была тверда,
Здесь страх не должен подавать совета...

Надо бороться, надо, чего бы это не стоило!

И Лобачевский боролся, боролся всю свою жизнь, перенося тяжелые нравственные муки и не поступаясь ни граном своей научной честности...

Прошли годы. Жизнь признала правоту и величие его идей. И сейчас, если спросить любого математика в нашей стране о том, кого он считает наиболее выдающимся русским математиком прошлого века, он без всяких колебаний ответит — это творец новой геометрии Николай Иванович Лобачевский.

Итак, одну терзают разъяренные христиане, другой от чрезмерного напряжения теряет свой глаз, третий терпит чудовищные нравственные муки от улюлюканья невежд и пасквилянтов... Так, может быть, не стоит заниматься наукой, которая приносит одни мучения?

А может быть, стоит ею заниматься, если ни жестокие страдания, ни насмешки обывателей, ни даже смерть не способны отвратить от нее ее благородных, ее бескорыстных, ее самоотверженных жрецов? Да, наверно, так. Иначе зачем было бы Гипатии восставать против всесильного Кирилла, зачем Лобачевскому пренебрегать элементарными «правилами научной благопристойности», Эйлеру — преодолевать мучительную боль, чтобы выполнить очень важные и очень ответственные расчеты?

Математика — это орудие, с помощью которого человек познает и покоряет себе окружающий его мир. Но это — особое орудие. Оно покоряет не только внешний мир, оно властно подчиняет себе и того, кто за него берется. А подчинив, оно не остановит его перед тем, чтобы принести во имя науки любые жертвы, которые она от него потребует.

Чтобы сделать в математике что-то действительно ценное, надо любить ее так, как любил ее каждый из

трех упомянутых нами математиков, как любили ее десятки и сотни других ее ревнителей. Не спорьте с безумствующими архиепископами, не терзайтесь от инсинуаций злобных хулителей, не жертвуйте своими глазами во имя науки, но сделайте хотя бы малую часть того, что сделал каждый из них, и мир навсегда остается благодарным вам.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Агора — рыночная площадь в древнегреческом городе, место народных собраний.

Амон-Ра, Изида — одни из главных божеств в египетской мифологии.

Вавилоняне — вначале название одного из народов, населявших Междуречье (Тигр и Евфрат). Впоследствии (в науке) — собирательное название всех народов, населявших эту область.

Галс — курс судна.

Гелиос — бог Солнца у древних греков.

Демос — название народа у древних греков.

Делос — остров в Эгейском море, на котором находился храм бога Аполлона. Жрица этого храма Пифия под влиянием глетворных испарений, исходящих из расположенной неподалеку от храма пещеры, впадала в бессознательное состояние, во время которого производила бредовые выкрики. Эти выкрики истолковывались как «глас божий».

Детерминатив — знак, поясняющий смысл иероглифа.

Древнее царство (XXX—XXI ст. до н. э.), **Среднее** царство (XXI—XVIII ст. до н. э.), **Новое** царство (XVI—XI ст. до н. э.)— периоды в истории Древнего Египта.

Иезуиты — члены монашеского ордена, основанного испанским монахом Игнатием Лойолой в 1534 г. Для достижения своих целей иезуиты не брезговали никакими средствами. Орден иезуитов — один из самых реакционных монашеских орденов

Иероглиф — рисунок, соответствующий слову или понятию в древнейшем египетском письме.

Ксантиппа — ставшее нарицательным имя сварливой жены Сократа (V ст. до. э.).

Лакедемон — другое название Спарты, аристократического рабовладельческого государства в Древней Греции.

Лапландия — территория на севере Финляндии.

Левант — территории, расположенные главным образом на нынешнем Ближнем Востоке.

Ломбардия — область на северо-западе Италии с главным городом Миланом.

Лопарь — представитель народности, населяющей северо-восточную часть Норвегии, север Швеции и север Финляндии. Другое название — лапландец, саами.

Лорето — город в Италии, славящийся как место паломничества к так называемой Лоретской божьей матери.

Миазмы — вредные испарения.

Мушкет — ручное огнестрельное ружье с фитильным замком.

Ойкумена (Эйкумена) — по представлениям древних греков, совокупность тех областей земной поверхности (главным образом в бассейне Средиземного моря), которые заселены человеком.

Оракул — а) жрец, передающий ответы бога верующим, б) место, где делались прорицания.

Папирус — тростник, растущий по берегам рек и озер в Африке и Палестине. Склеивая определенным образом волокна, получаемые из его стеблей, изготовляли писчий материал, также называвшийся папирусом.

Плевелы — род сорняка.

Полиспаст — система блоков для поднятия тяжестей.

Политехническая школа — высшее учебное заведение в Париже, созданное во время французской буржуазной революции 1789—1793 г. Школа готовила инженеров для занятия государственных должностей.

Портал — парадный вход в общественное здание.

Прагматизм — течение в буржуазной философии, представители которого признают истиной лишь то, что практически полезно.

Ратуша — здание городского управления.

Румб — одно из 32 делений компаса.

Сивилла (Кумская) — прорицательница из города Кумы в Древнем Риме.

Смегма — доставаемый со дна болот ил, которым мылись древние греки.

Стратег — а) полководец, б) умелый политический деятель.

Сфинкс — в Древнем Египте статуя мифического существа с телом льва и лицом человека (обычно — портретом фараона).

Турень — провинция на западе Франции, расположенная в бассейне р. Луары.

Триады — три чем-либо связанных лица, предмета, понятия, Триада

(триады) Менехма — конические сечения, которые впоследствии, у Аполлония Пергского, получили название эллипса, гиперболы и параболы.

Фрисландия — историческая область на побережье Северного моря, провинция современных Нидерландов.

Фуляр — тонкая шелковая ткань.

Халдеи — народ, населявший территорию Междуречья со II тысячелетия до н. э. Позднее ассимилировались с вавилонянами.

Хеопс (Хуфу) — египетский фараон, правивший в начале III тысячелетия до н. э.

Швабия — историческая область в Германии.

Шкипер — командир коммерческого судна.

Штатгальтер (в Нидерландах XVI—XVII ст.) — титул носителя верховной власти.

Энциклопедия — научное справочное издание. Первая в истории энциклопедия — коллективный труд группы французских ученых и писателей, возглавляемой Д. Дидро. В состав этой группы входили Ж. д'Аламбер, Ш. Монтескье, Ф. Вольтер, Ж.-Ж. Руссо и др. Полное название труда «Энциклопедия, или Толковый словарь наук, искусств и ремесел».

Список литературы

Арманд Д. Как измерили землю. М.— Л., Детгиз, 1941.

Веселовский И. Н. Архимед. М., Учпедгиз, 1957.

Дальма А. Эварист Галуа — революционер и математик. М., Физматгиз, 1960.

Депман І. Я. Розповіді про математику. К., Радянська школа, 1957.

Инфельд Л. Эварист Галуа — избранник богов. М., Молодая гвардия, 1966.

Каган В. Ф. Архимед. М., Гостехиздат, 1951.

Кудрявцев П. С. Исаак Ньютон. М., Учпедгиз, 1955.

Оре О. Замечательный математик Нильс Хенрик Абель. М., Физматгиз, 1961.

Смогоржевський О. С. Метод координат. К., Радянська школа, 1954.

Чистяков В. Д. Три знаменитые задачи древности. М., Учпедгиз, 1963.

Шереметевский В. П. Очерки по истории математики. М., Учпедгиз, 1940.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к первому изданию 3

Предисловие ко второму изданию 4

Академик А. Д. Александров и студенты 5
О чем он думал, наш далекий предок? 7
Гениально, потому что просто 11
Загадка старого папируса 12
В тумане времени 20
Дерзкий чужестранец 23
Расплата за силу 26
Смерть в Метапонте 29
Числа добрые и числа злые 30
Темница у моря 35
Великие задачи 37
Геометрия и Аполлон 41
Кривые 44
Два Архимеда 47
Поэма о скупом царе Гиероне, хитром ювелире, мудром Архимеде, его сварливой жене и о законе погружения тел в жидкость 48
Последние мгновения 54
Триада 58
Конические сечения вокруг нас 62
Алгебра приходит на помощь к геометрии 64
Счастливая судьба солдата 65
Великое творение 67
Мир в координатах 73
Земля на кончике пера 76
Ученый д'Артаньян 81

Если хочешь быть хорошим математиком 86
Время, которое нуждалось в титанах 87
Уравнения 88
Галуа 95
Бурное время 100
Заика и врач 102
Диспут 105
Формула Кардано 112
Памятник в королевском парке 115
Поля, группы, расширения 116
Дремлющие силы 121
Дерзать, дерзать 122

Приложение 129

Список литературы 132

Библиотечка физико-математической школы

Математика

Николай Иванович Кованцов

МАТЕМАТИКА И РОМАНТИКА

Киев,
Головное издательство
издательского объединения
«Вища школа»

Редактор *Г. Г. Рубан*
Художественный редактор *Е. В. Чурий*
Литературный редактор *М. Ф. Коцюбинская*
Технический редактор *М. С. Чабан*
Корректор *Л. Г. Батшеева*

Информ. бланк. № 4311

Сдано в набор 17.05.79. Подп. в печать 12.09.79. Формат 84×108$^{1}/_{32}$. Бумага типогр. № 2. Лит. гарн. Выс. печать. 7,14 усл. печ. л. 6,7 уч.-изд. л. Тираж 50 000 экз. Изд. № 4479. Зак. 9—1433. Цена 20 к.

Головное издательство издательского объединения «Вища школа». 252054, Киев-54, ул. Гоголевская, 7.

Головное предприятие республиканского производственного объединения «Полиграфкнига» Госкомиздата УССР, 252057, Киев-57, Довженко, 3.

В Головном издательстве
издательского объединения «Вища школа»
в 1981 году выйдут в свет новые книги из серии
«Библиотечка физико-математической школы»:

Бекишев Г. А., Кратко М. И. «Суммирование последовательностей». Яз. укр. 5 л. 15 к. 15 000 экз.

Михайловский В. И. «Векторная алгебра». Яз. укр. 5 л. 15 к. 15 000 экз.

Меняйлов Н. Е. «Магнитные свойства вещества». Яз. укр. 6 л. 15 к. 15 000 экз.

Федорченко А. М., Чайка Г. Е. «Физические основы механики». Яз. укр. 5 л. 15 к. 15 000 экз.

Кучеренко Е. М. «Свойства газов». Яз. рус. 5 л. 15 к. 15 000 экз.

Уважаемые товарищи!

Эти книги можно заказать в магазинах облкниготоргов и облпотребсоюзов, а также в специализированных магазинах «Книга-почтой».

20 к.